Álgebra

Notas de clase

grupos 12.1 y 13.1

Curso 2020-2021

Estructuras algebraicas básicas

- **Lenguaje y razonamiento matemáticos**
- **Álgebra de Boole**
- **Funciones entre conjuntos**
- **Grupos, anillos y cuerpos**

Sección 1

Lenguaje y razonamiento matemáticos

Lógica de proposiciones

Proposición: enunciado que puede ser verdadero o falso

Variable proposicional: *p, q, r, s, t, ...*

Valor de verdad de una proposición: VERDADERO: V, T, ⊤, 1 FALSO: F, ⊥, 0

Tabla de verdad:

p
V
F

Conectores:

- Símbolos para representar conexiones lógicas entre proposiciones
- Forman proposiciones compuestas
- Operan entre proposiciones (operaciones lógicas)

Conectores (un argumento): NEGACIÓN ($\neg$)

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conectores (dos argumentos): CONJUNCIÓN ($\wedge$), DISYUNCIÓN ($\vee$), DISYUNCIÓN EXCLUSIVA ($\veebar$)
CONDICIONAL ($\Longrightarrow$), BICONDICIONAL ($\Longleftrightarrow$)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	**V**	V	V	F	V	V
V	**F**	F	V	V	F	F
F	**V**	F	V	V	V	F
F	**F**	F	F	F	V	V

Conjunción: p Y q, p AND q

Disyunción: p O q, p OR q

Disyunción exclusiva: O p O q, p XOR q

Condicional: Implicación material (antecedente: p, consecuente: q ; cond. necesaria q, cond. suficiente: p)

- inversa de $p \Longrightarrow q$: $\neg p \Longrightarrow \neg q$
- Recíproca de $p \Longrightarrow q$: $q \Longrightarrow p$
- Contrarrecíproca de $p \Longrightarrow q$: $\neg q \Longrightarrow \neg p$

Bicondicional: Equivalencia (p, q cond. necesaria y suficiente)

¿Cuántos conectores diferentes podremos definir con dos proposiciones? 2^{2^2}

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
V	**V**	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*
V	**F**	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*
F	**V**	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	**F**	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*

El valor de verdad de cualquier expresión con 2 variables proposicionales es una de estas columnas

Así: $f_1 \equiv p \wedge q$ $\quad f_7 \equiv p \vee q$ $\quad f_6 \equiv p \veebar q$ $\quad f_{13} \equiv p \implies q$ $\quad f_9 \equiv p \iff q$

o por ejemplo: $f_8 \equiv \neg(p \vee q)$ $\quad f_{14} \equiv \neg(p \wedge q)$ $\quad f_{12} \equiv \neg p$

Podemos definir otros conectores:

Operador de Peirce: $f_8 \equiv p \downarrow q$ (NI p NI q, p NOR q)

Operador de Sheffer: $f_{14} \equiv p \,|\, q$ (p INCOMPATIBLE CON q, p NAND q)

El valor de verdad de una expresión con 3 variables proposicionales es una de las 2^{2^3} posibles

p	q	r	f_0	f_1	f_2	f_3		f_{254}	f_{255}
V	**V**	**V**	*F*	*V*	*F*	*V*		*F*	*V*
V	**V**	**F**	*F*	*F*	*V*	*V*		*V*	*V*
V	**F**	**V**	*F*	*F*	*F*	*F*		*V*	*V*
V	**F**	**F**	*F*	*F*	*F*	*F*	......	*V*	*V*
F	**V**	**V**	*F*	*F*	*F*	*F*		*V*	*V*
F	**V**	**F**	*F*	*F*	*F*	*F*		*V*	*V*
F	**F**	**V**	*F*	*F*	*F*	*F*		*V*	*V*
F	**F**	**F**	*F*	*F*	*F*	*F*		*V*	*V*

Tautología: expresión lógica que es verdadera independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman

f_{15} en el caso de dos variables, f_{255} en el caso de tres variables

Contradicción: expresión lógica que es falsa independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman

f_0 en el caso de dos o tres variables

Proposición contingente o factual: enunciado que puede ser verdadero o falso según lo sean las proposiciones que lo forman

Ejemplos:

- Contradicciones:
  - $p \wedge \neg p$
  - $\neg(p \vee \neg p)$
  - $(p \implies q) \wedge (p \wedge \neg q)$

- Tautologías:
  - $p \vee \neg p$ (ley del tercio excluso)
  - $\neg(p \wedge \neg p)$ (ley de no contradicción)

Las tautologías reciben el nombre de LEYES LÓGICAS.

Cuando tienen forma de implicación se denomina IMPLICACIÓN LÓGICA: no puede darse que el consecuente sea falso siendo verdadero el antecedente.

Cuando tiene forma de bicondicional se denomina EQUIVALENCIA LÓGICA: las dos proposiciones relacionadas tienen el mismo valor de verdad

Ejemplos:

- Implicaciones lógicas:
  - $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$ (*modus ponendo ponens*)
  - $(\neg q \wedge (p \implies q)) \implies \neg p$ (*modus tollendo tollens*)
  - $(\neg p \wedge (p \vee q)) \implies q$ (silogismo disyuntivo, *modus tollendo ponens*)
  - $(p \wedge \neg(p \wedge q)) \implies \neg q$ (*modus ponendo tollens)*
  - $((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$ (silogismo hipotético)
  - $(p \wedge \neg p) \implies q$ (de una contradicción se deduce cualquier cosa)
  - $((p \implies q) \wedge (\neg p \implies q)) \implies q$

- Equivalencias lógicas:
  - $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ (ley de contraposición: equivalencia entre condicional y contrarrecíproca)
  - $\neg(\neg p) \iff p$ (ley de involución o doble negación)
  - $(p \implies q) \iff ((p \wedge \neg q) \implies (p \wedge \neg p))$ (ley de reducción al absurdo)
  - $p \iff (\neg p \implies (q \wedge \neg q))$ (otra variante)
  - $(\neg p \implies p) \iff p$ (otra variante)
  - $((p \implies q) \wedge (p \implies r)) \iff (p \implies (q \wedge r))$
  - $((p \implies q) \vee (r \implies q)) \iff ((p \wedge r) \implies q)$

- Equivalencias lógicas entre conectivas:
  - $(p \veebar q) \iff \neg(p \iff q)$ (equivalencia de la disyunción exclusiva)
  - $(p \iff q) \iff ((p \implies q) \wedge (q \implies p))$ (equivalencia del bicondicional)
  - $(p \iff q) \iff (\neg p \iff \neg q)$
  - $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$ (equivalencia del condicional)
  - $(p \implies q) \iff (\neg(p \wedge \neg q))$ (equivalencia del condicional)
  - $(p \downarrow q) \iff \neg(p \vee q)$ (equivalencias del operador de Peirce)
  - $(p \downarrow p) \iff \neg p$
  - $((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)) \iff (p \vee q)$
  - $((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \iff (p \wedge q)$
  - $(((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)) \iff (p \implies q)$
  - $(p \mid q) \iff \neg(p \wedge q)$ (equivalencias del operador de Sheffer)
  - $(p \mid p) \iff \neg p$
  - $((p \mid q) \mid (p \mid q)) \iff (p \wedge q)$
  - $((p \mid p) \mid (q \mid q)) \iff (p \vee q)$
  - $(p \mid (q \mid q)) \iff (p \implies q)$

- Equivalencias lógicas (propiedades):
  - $(p \wedge p) \iff p$ $\quad$ $(p \vee p) \iff p$ (leyes de idempotencia)
  - $(p \wedge (p \vee q)) \iff p$ $\quad$ $(p \vee (p \wedge q)) \iff p$ (leyes de absorción)
  - $(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$ $\quad$ $(p \vee q) \iff (q \vee p)$ (leyes de conmutatividad)
  - $((p \wedge q) \wedge r) \iff (p \wedge (q \wedge r))$ $\quad$ $((p \vee q) \vee r) \iff (p \vee (q \vee r))$ (leyes de asociatividad)
  - $(p \wedge \top) \iff p$ $\quad$ $(p \vee \bot) \iff p$ (elementos neutros)
  - $(p \wedge \bot) \iff \bot$ $\quad$ $(p \vee \top) \iff \top$ (elementos absorbentes)
  - $(p \wedge \neg p) \iff \bot$ $\quad$ $(p \vee \neg p) \iff \top$ (elemento complementario)
  - $(p \wedge (q \vee r)) \iff ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $\quad$ $(p \vee (q \wedge r)) \iff ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (ley de distribuitividad)
  - $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$ $\quad$ $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$ (leyes de De Morgan)

Lógica de predicados (de primer orden)

Predicado: enunciado que se refiere a una propiedad de un objeto o de varios, representados por una o más variables.

Cuando se sustituyen las variables (se “ligan”) por algún elemento de cierto conjunto o **universo del discurso** obtenemos una proposición.

Ejemplos:

$P(n)$ [n es un número par]. El universo del discurso es el conjunto de los números naturales o el de los enteros.

$L(x, y)$ [$x \leq y$]. El universo del discurso es el conjunto de los números reales.

Así: $P(2), P(4)$ son proposiciones verdaderas y $P(7), P(1)$ son falsas. $L(2,2)$ es verdadera y $L(9,1)$ es falsa.

Cuantificadores: Son alusiones a algunos de los elementos del universo del discurso.

“Ligan” las variables presentes en el predicado, que dejan de ser “libres”, lo que contribuye a convertirlo en proposición (lo será cuando todas sus variables estén “ligadas”).

Cuantificador universal: $\forall$ ("para cada", "para todo").

Notaciones: $\forall x\, P(x)$ $\quad \forall x, P(x)$ $\quad \forall x \| P(x)$ $\quad (\forall x)\, P(x)$ (Universo del discurso implícito)

$\forall x \in D, P(x)$ $\quad \forall x, x \in D, P(x)$ (Universo del discurso explícito)

Se verifica:

$$\forall x \in D, P(x) \iff \forall x, (x \in D \implies P(x))$$

$$\forall x \in D, P(x) \implies P(a) \qquad \text{(si } a \in D\text{)}$$

Cuantificador existencial: $\exists$ ("existe algún", "para algún", "al menos un").

Notaciones: $\exists x\, P(x)$ $\quad \exists x, P(x)$ $\quad \exists x \| P(x)$ $\quad (\exists x)\, P(x)$ (Universo del discurso implícito)

$\exists x \in D, P(x)$ $\quad \exists x, x \in D, P(x)$ (Universo del discurso explícito)

Se verifica:

$$\exists x \in D, P(x) \iff \exists x, (x \in D \wedge P(x))$$

$$P(a) \implies \exists x \in D, P(x) \qquad \text{(si } a \in D\text{)}$$

Cuantificador de existencia y unicidad: $\exists !$ ("existe un único", "para un y solo un").

Orden de los cuantificadores: puede ser relevante.

Ejemplos: $\forall x, \exists y, P(x, y)$ $\qquad \exists y, \forall x, P(x, y)$

(Nótese que $\exists y, \forall x, P(x, y) \implies \forall x, \exists y, P(x, y)$, pero no la recíproca)

Negación de los cuantificadores:

UNIVERSAL:

$\neg\forall x, P(x) \iff \exists x, \neg P(x)$ $\qquad$ $\neg\forall x \in D, P(x) \iff \exists x \in D, \neg P(x)$ $\qquad$ (a veces se emplea $\not\forall x, P(x)$)

Nótese que:

$$\neg\forall x \in D, P(x) \iff \neg\forall x, (x \in D \implies P(x)) \iff \exists x, \neg(x \in D \implies P(x)) \iff \exists x, (x \in D \wedge \neg P(x)) \iff \exists x \in D, \neg P(x)$$

(Se ha empleado: $\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q)$)

EXISTENCIAL:

$\neg\exists x, P(x) \iff \forall x, \neg P(x)$ $\qquad$ $\neg\exists x \in D, P(x) \iff \forall x \in D, \neg P(x)$ $\qquad$ (a veces se emplea $\nexists x, P(x)$)

Nótese que:

$$\neg\exists x \in D, P(x) \iff \neg\exists x, (x \in D \wedge P(x)) \iff \forall x, \neg(x \in D \wedge P(x)) \iff \forall x, (x \in D \implies \neg P(x)) \iff \forall x \in D, \neg P(x)$$

(Se ha empleado: $\neg(p \wedge q) \iff p \implies \neg q$)

EJEMPLOS:

$$\neg\forall d, \exists m, \forall p, L(m,p,d) \iff \exists d, \neg\exists m, \forall p, L(m,p,d) \iff \exists d, \forall m, \neg\forall p, L(m,p,d) \iff \exists d, \forall m, \exists p, \neg L(m,p,d)$$
$$\neg\exists m, \forall p, \forall d, L(m,p,d) \iff \forall m, \neg\forall p, \forall d, L(m,p,d) \iff \forall m, \exists p, \neg\forall d, L(m,p,d) \iff \forall m, \exists p, \exists d, \neg L(m,p,d)$$

Razonamiento deductivo

Regla de inferencia o forma de argumentación: Proceso por el que, a partir de un conjunto de proposiciones conocidas (**premisas**) hipotéticamente verdaderas, se obtiene otra proposición verdadera (**conclusión**).

$$(*)\qquad \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array}$$

La conclusión **se deriva de** las premisas, es decir que siendo estas verdaderas, la conclusión es necesariamente verdadera (no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa).

Razonamiento **válido:** Conclusión verdadera en todos los casos en que todas las premisas sean simultáneamente verdaderas.

Razonamiento no válido o **falacia**: Conclusión falsa en al menos algún caso en que todas las premisas sean simultáneamente verdaderas.

Razonamiento **inconsistente**: Cuando no es posible que todas las premisas sean simultáneamente verdaderas.

El razonamiento (*) es válido (o inconsistente) $\iff$ $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \implies q$ es tautológica.

El lenguaje matemático

Uniforme: para todos lo mismo

Unívoco: sin ambigüedades

Conjunto de proposiciones verdaderas.

Proposiciones iniciales: **axiomas**, **postulados** y **definiciones**
Proposiciones deducidas: **proposición**, **lema**, **teorema**, **corolario, ...**

Conjetura: proposición que se cree cierta, pero que no se ha podido demostrar verdadera ni falsa

Ej: Conjetura de Goldbach (1742): Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos
4 = 2+2 6 = 3+3 8 = 3+5 10 = 5+5 12 = 5+7 14 = 7+7 16 = 5+11 ...
(se ha comprobado computacionalmente hasta aprox. $4 \cdot 10^{18}$)

Demostraciones: a partir de un conjunto de proposiciones iniciales, deducimos proposiciones más complejas**,** mediante reglas de razonamiento aceptadas.

Las proposiciones a demostrar suelen ser de la forma:

- $A \implies B$
- $A \iff B$ $\qquad (A \implies B) \wedge (B \implies A)$
- B $\qquad A \implies B$ $\qquad$ siendo A un conjunto de proposiciones admitidas previamente

Estrategias de demostración (en muchos casos aparecen combinaciones de dos o más de ellas):

- **Hacia adelante**, directa o método sintético, para demostrar $A \implies B$:
  Examinamos A y buscamos una cadena de implicaciones que lleve a B
  $$A \implies X_1, \quad X_1 \implies X_2, \quad X_2 \implies \cdots \qquad \cdots \implies X_n, \quad X_n \implies B$$

- **Hacia atrás**, indirecta o método analítico, para demostrar $A \implies B$:
  Examinamos B y buscamos una cadena de implicaciones que lleve a B desde A
  $$X_n \implies B, \qquad \cdots \implies X_n, \quad X_2 \implies \cdots, \quad X_1 \implies X_2, \quad A \implies X_1$$

- Por **distinción de casos**:
  Cuando la proposición se demuestra separadamente para cada caso en que pueda separarse

- **Contraposición**, para demostrar $A \implies B$:
  Demostramos $\neg B \implies \neg A$

- **Reducción al absurdo**, para demostrar $A \implies B$ (o B):
  Intentamos demostrar $A \wedge \neg B$ (o $\neg B$) y llegamos a una contradicción

- **Por contraejemplo**, para demostrar $\neg \forall x, P(x)$:
  Basta encontrar algún a para el que $\neg P(a)$

- **Inducción simple**, para demostrar $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$:
  Demostramos $P(1)$ y $P(k) \implies P(k+1)$

- **Inducción** fuerte o **completa**, para demostrar $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$:
  Demostramos $P(1)$ y $P(1) \wedge \cdots \wedge P(k) \implies P(k+1)$

Hacia adelante:

$\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \text{Impar}(n^3)$ (El cubo de todo número impar es impar)

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k + 1$
2. $n = 2k + 1 \implies n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$
3. $n^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 \implies \text{Impar}(n^3)$

$\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \text{Impar}(n^2)$ (El cuadrado de todo número impar es impar)

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k + 1$
2. $n = 2k + 1 \implies n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
3. $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \implies \text{Impar}(n^2)$

$\forall n \in \mathbf{N}, \text{Par}(n) \implies \text{Par}(n^2)$ (El cuadrado de todo número par es par)

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \text{Par}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k$
2. $n = 2k \implies n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
3. $n^2 = 2(2k^2) \implies \text{Par}(n^2)$

Hacia atrás:

$\forall x, y \in \mathbf{R}, x, y \geq 0 \implies \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ (La media geométrica de dos números no es mayor que su media aritmética

1. $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} \overset{\Longleftarrow}{\iff} \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geq 0$
2. $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geq 0 \overset{\Longleftarrow}{\iff} x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$
3. $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \overset{\Longleftarrow}{\iff} (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2(\sqrt{x})(\sqrt{y}) \geq 0$
4. $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2(\sqrt{x})(\sqrt{y}) \geq 0 \overset{\Longleftarrow}{\iff} (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$
5. $\forall x, y \in \mathbf{R}, x, y \geq 0 \implies (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

Contraposición (y por casos):

$\forall m, n \in \mathbf{Z}, \text{Impar}(nm) \implies \text{Impar}(n) \wedge \text{Impar}(m)$ (Si mn es impar, m y n son impares)

1. $\neg(\text{Impar}(n) \wedge \text{Impar}(m)) \implies \text{Par}(n) \vee \text{Par}(m)$
2. $\text{Par}(n) \vee \text{Par}(m) \implies \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \vee \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2k$
3. $\left\{ \begin{array}{c} \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \implies mn = 2km = 2(km) \\ \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2k \implies mn = 2kn = 2(kn) \end{array} \right\} \implies \text{Par}(mn)$

$\forall n \in \mathbf{N}, n > 2 \wedge \text{Primo}(n) \implies \text{Impar}(n)$ (Todo número primo mayor que 2 es impar)

1. $\neg\text{Impar}(n) \implies \text{Par}(n)$
2. $\text{Par}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k$
3. $\exists k \in \mathbf{N}, n = 2k \implies \left\{ \begin{array}{c} n = 2 \\ n \neq 2 \wedge 2 \mid n \end{array} \right\}$
4. $\left\{ \begin{array}{c} n = 2 \\ n \neq 2 \wedge 2 \mid n \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} n = 2 \\ \neg\text{Primo}(n) \end{array} \right\} \implies n = 2 \vee \neg\text{Primo}(n)$
5. $n = 2 \vee \neg\text{Primo}(n) \implies n \leq 2 \vee \neg\text{Primo}(n)$

$\text{Impar}(c) \implies \nexists n \in \mathbf{Z}, n^2 + n - c = 0$ (La ecuación $n^2 + n - c = 0$ no tiene solución entera para c impar)

1. $\exists n \in \mathbf{Z}, n^2 + n - c = 0 \implies \text{Par}(n) \vee \text{Impar}(n)$
2. $\left\{ \begin{array}{c} \text{Par}(n) \\ \text{Impar}(n) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \\ \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k + 1 \end{array} \right\}$
3. $\left\{ \begin{array}{c} \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \\ \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k + 1 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} c = n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k) \\ c = n^2 + n = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1) = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1) \end{array} \right\} \implies \text{Par}(c)$
4. $\text{Par}(c) \implies \neg\text{Impar}(c)$

$\left\{ \begin{array}{c} \forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n^2) \implies \text{Impar}(n) \\ \forall n \in \mathbf{N}, \text{Par}(n^2) \implies \text{Par}(n) \end{array} \right\}$ (sus contrarrecíprocas fueron demostradas hacia adelante)

Reducción al absurdo (y por casos):

$\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ ($\sqrt{2}$ es irracional)

1. $\sqrt{2} \in \mathbf{Q} \implies \exists p, q \in \mathbf{N}, \text{Coprimos}(p,q) \wedge \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$
2. $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \implies 2 = \dfrac{p^2}{q^2}$
3. $p^2 = 2q^2 \implies \text{Par}(p^2)$
4. $\text{Par}(p^2) \implies \text{Par}(p)$ $(2 \mid p)$
5. $\text{Par}(p) \implies \exists k \in \mathbf{N}, p = 2k$
6. $p^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2$
7. $q^2 = 2k^2 \implies \text{Par}(q^2)$
8. $\text{Par}(q^2) \implies \text{Par}(q)$ $(2 \mid q)$
9. $2 \mid p \wedge 2 \mid q \wedge \text{Coprimos}(p,q)$ es UNA CONTRADICCIÓN

El conjunto de los números primos no es finito

1. $\text{PRIMOS} = \{2,3,5,7,\cdots,P\}$
2. $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots P + 1 \wedge M > P$
3. $\left\{ \begin{array}{lll} \text{Primo}(M) & & \text{(CONTRADICCIÓN)} \\ \neg\text{Primo}(M) & \implies & M = Q \cdot R \wedge \text{Primo}(Q) \end{array} \right\} \implies \left\{ M = Q \cdot R = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots Q \cdots P + 1 \right\}$
4. $\left\{ Q \cdot R = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots Q \cdots P + 1 \right\} \implies \left\{ Q \cdot \left(R - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots P\right) = 1 \right\} \implies \left\{ Q \mid 1 \quad \text{(CONTRADICCIÓN)} \right\}$

Por contraejemplo:

$\neg\left(f \text{ continua en } x = a \implies f \text{ derivable en } x = a\right)$

1. Considérese $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x|$ en $x = 0$

Por inducción simple:

$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1. $F(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\qquad S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2. Queremos probar que $\forall n \in \mathbf{N}, S(n) = F(n)$
3. $n = 1 \implies S(1) = 1 \wedge F(1) = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$
4. $F(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$
5. $S(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = S(k) + (k+1)$
6. $S(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \dfrac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} = F(k+1)$

Por inducción completa:

$\forall n \in \mathbf{N}, n > 1 \implies \text{Primo}(n) \vee \text{Poducto\_de\_primos}(n)$

1. Para $n = 1$ es cierta
2. $n = 2 \implies \text{Primo}(2)$
3. $n = k + 1 \implies \left\{ \begin{array}{c} \text{Primo}(k+1) \\ k + 1 = pq \wedge p < k + 1 \wedge q < k + 1 \end{array} \right\}$
4. $\implies \left\{ \begin{array}{c} \\ k + 1 = pq \wedge (\text{Primo}(p) \vee \text{Producto\_de\_primos}(p)) \wedge (\text{Primo}(q) \vee \text{Producto\_de\_primos}(q)) \end{array} \right\}$
5. $\implies \left\{ \begin{array}{c} \\ \text{Producto\_de\_primos}(k+1) \end{array} \right\}$

Sección 2

Álgebra de Boole

Teoría de conjuntos

Conjunto: Colección de objetos determinados y distintos de nuestra percepción o nuestro pensamiento reunidos en un todo (†)

Pertenencia: Dado un objeto x siempre tendremos que poder decidir si x está o no en el conjunto C
Definimos así el predicado $x \in C$ y su negación $\neg x \in C \iff x \notin C$

Determinación:

- Por **extensión**: enumerando todos sus elementos $C = \{a, b, c\}$
  No es útil cuando el número de elementos es muy grande o no finito

- Por **intensión** o **comprensión:** mediante la extensión de un predicado $C = \{x \,|\, P(x)\}$
  Dado cualquier predicado $P(x)$ siempre tiene asociado un conjunto: el de elementos x que lo hacen verdadero

Ejemplos:

- $C = \{2,4,6,8\} = \{x \,|\, x \in \mathbf{N} \wedge x < 10 \wedge \mathrm{Par}(x)\}$

- $C' = \{x \in \mathbf{Z} \,|\, \mathrm{Par}(x)\}$

(†) Es una definición cuestionada porque conduce a la aparición de paradojas.

Paradoja de B. Russell:

Sea X el conjunto de los conjuntos que no son elementos de sí mismos: $X = \{x \mid x \notin x\}$ ¿Será X elemento de sí mismo?

- Si lo fuera, $X \in X$, pero entonces $X \notin X$
- Si no lo fuera, $X \notin X$, pero entonces $X \in X$

La “*paradoja del barbero*” es similar, en términos de la lógica: En una ciudad hay solamente un barbero, que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?

Sea A(b,x) el predicado el barbero b afeita al ciudadano x. Luego $\forall x, \neg A(x, x) \iff A(b, x)$

En el caso del barbero b tenemos que $\neg A(b, b) \iff A(b, b)$

Estos problemas se resuelven con la teoría axiomática de conjuntos, que construye estos de manera precisa y rigurosa.
No la abordaremos en esta asignatura.

Primeras definiciones:

Inclusión[†] **(subconjunto):** $A \subset B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$

Igualdad: $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$ $\quad A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$

Conjunto vacío: $\varnothing = \{x \,|\, x \neq x\}$ $\quad \forall x, x \notin \varnothing$ $\quad$ (es **único**[‡])

Conjunto potencia de $\mathbf{X}$: $\mathscr{P}(X) = \{A \,|\, A \subset X\}$ $\quad A \in \mathscr{P}(X) \iff A \subset X$ $\quad$ (o conjunto de partes de X)

Propiedades:

- $\forall A, \varnothing \subset A$
- $\forall A, A \subset A$
- $\forall A, \forall B, \forall C, (A \subset B \wedge B \subset C) \implies A \subset C$
- $\forall X, \varnothing \in \mathscr{P}(X)$
- $\forall X, X \in \mathscr{P}(X)$

(†) Se dice que la inclusión es estricta cuando $A \subset B \wedge A \neq B$, es decir $A \subset B \wedge \exists x \in B, x \notin A$ y se dice que A es un subconjunto **propio** de B. A veces se emplean símbolos diferentes: $\subseteq$ para la inclusión (o inclusión amplia) y $\subset$ para la inclusión estricta

(‡) Si $\varnothing, \varnothing'$ vacíos $\implies \varnothing \subset \varnothing'$ por ser $\varnothing$ vacío y $\varnothing' \subset \varnothing$ por ser $\varnothing'$ vacío $\implies \varnothing = \varnothing'$

Ejemplo:

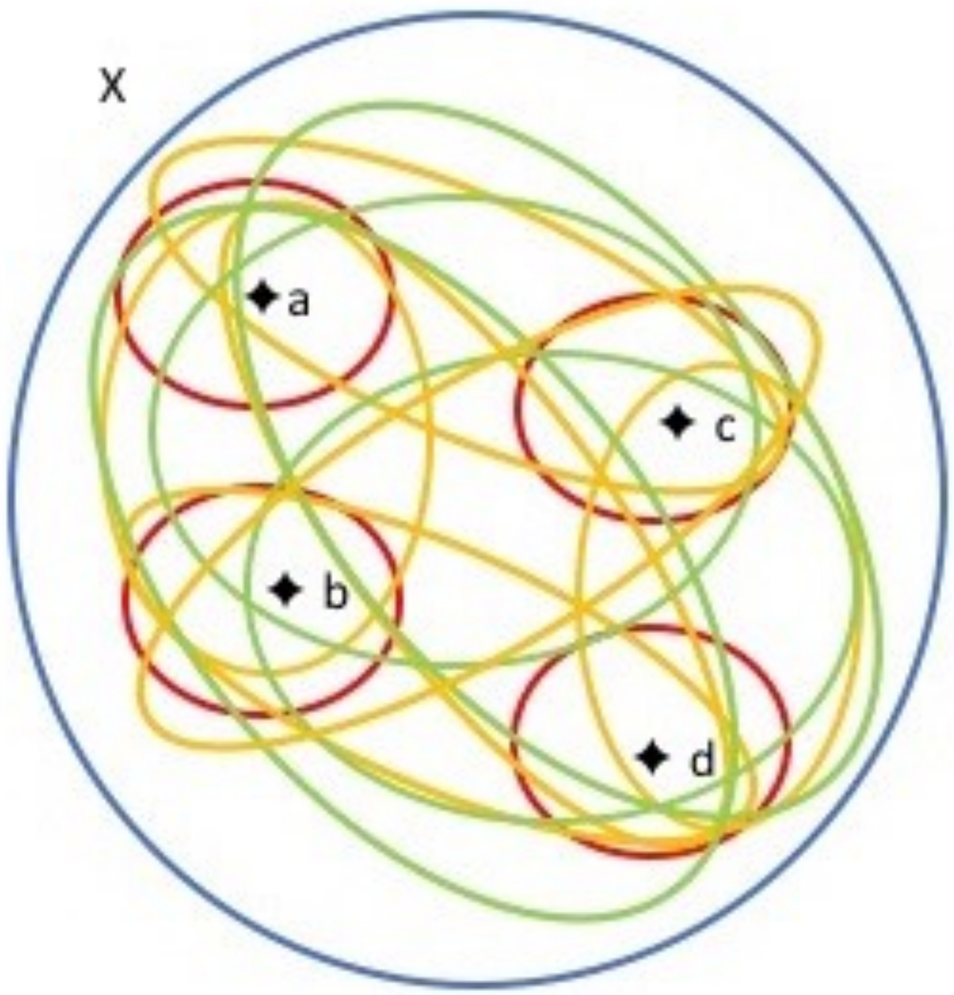
Sea $X = \{a, b, c, d\}$

$$\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

¿Cuántos elementos tiene? $2^4 = 16$

Si X tiene n elementos, $\mathscr{P}(X)$ tiene 2^n elementos

Representación mediante diagrama de Venn:

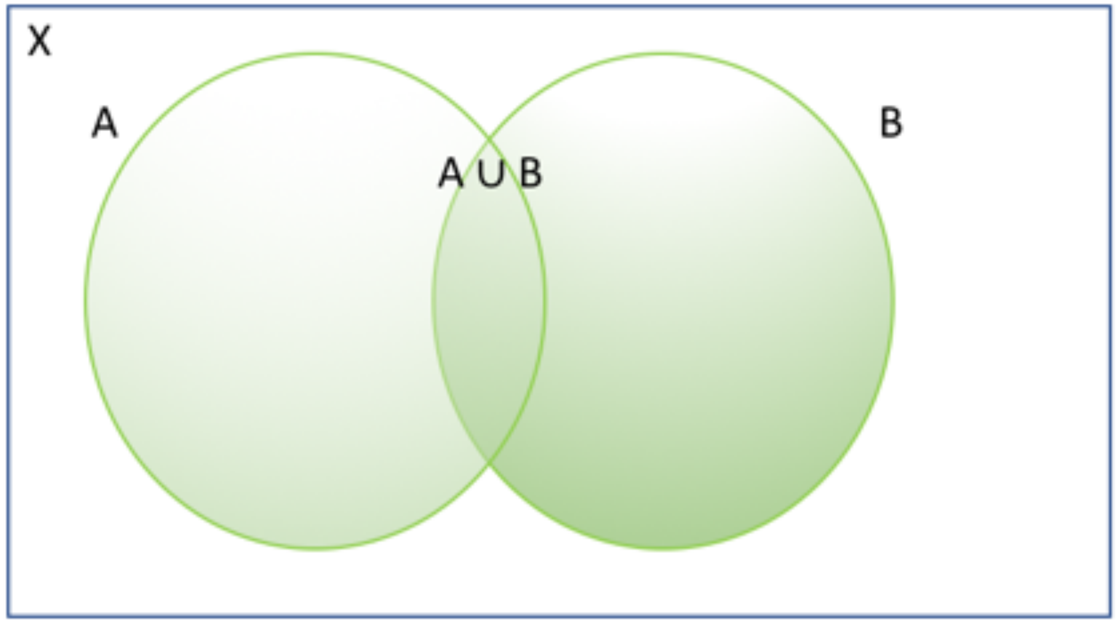


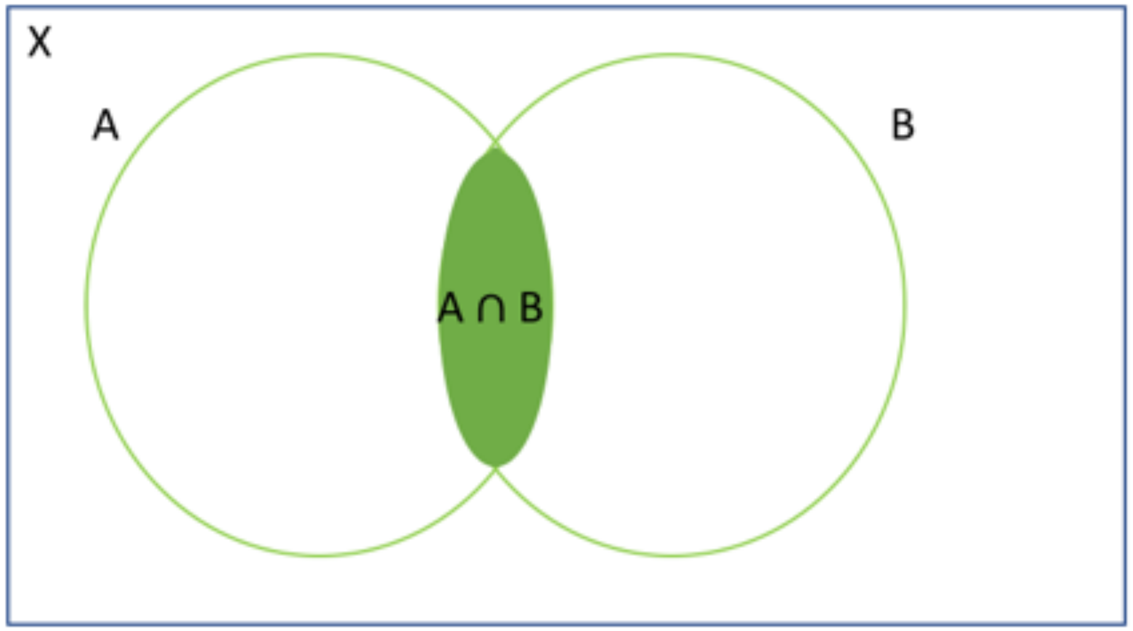
Operaciones en $\mathscr{P}(X)$

Sean $A, B \in \mathscr{P}(X)$

Unión: $A \cup B = \{x \in X \,|\, x \in A \vee x \in B\}$

$$\bigcup_{V \in I \subset \mathscr{P}(X)} V = \{x \,|\, x \in X \wedge \exists V \in I, x \in V\}$$

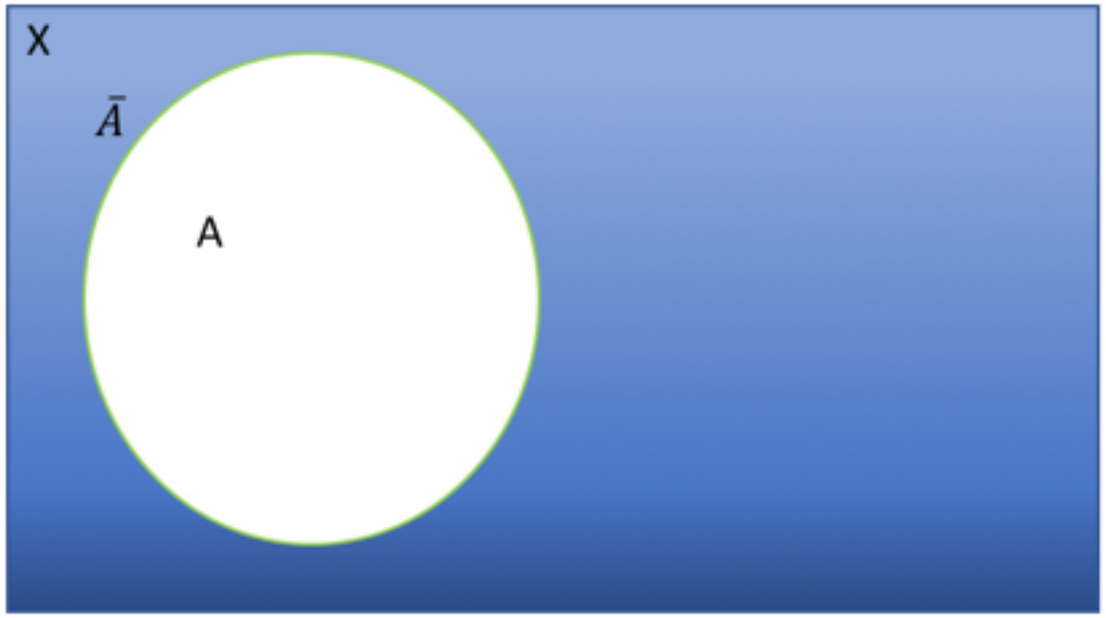




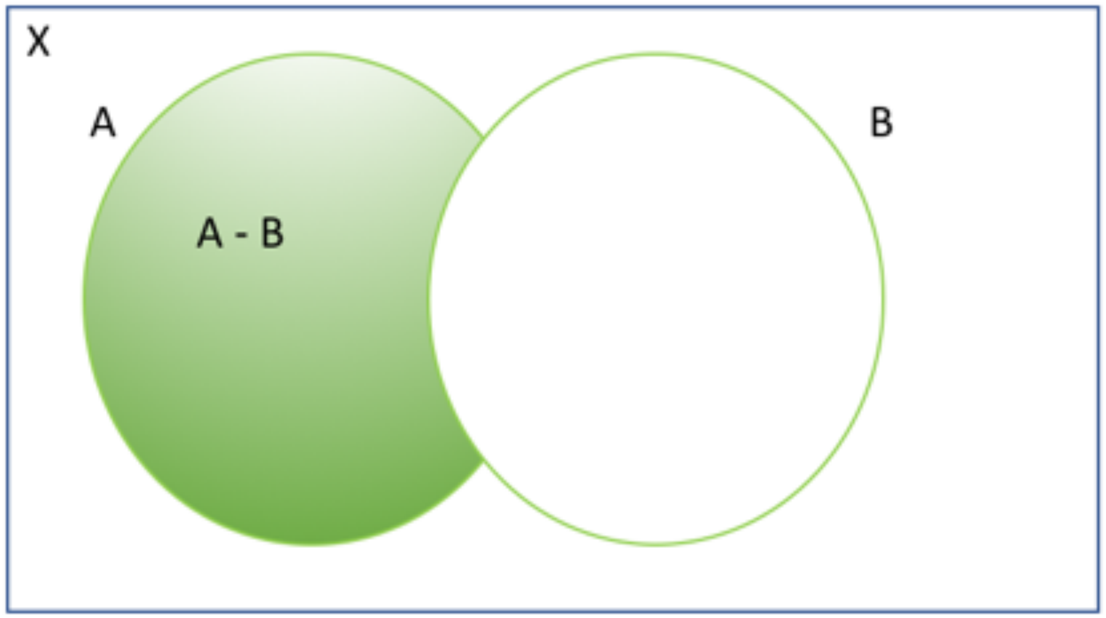
Intersección: $A \cap B = \{x \in X \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$

$$\bigcap_{V \in I \subset \mathscr{P}(X), I \neq \varnothing} V = \{x \,|\, x \in X \wedge \forall V \in I, x \in V\}$$

Complementario $\overline{A} = \{x \in X \,|\, x \notin A\} = X - A$



Diferencia: $A - B = \{x \in X \,|\, x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$



Propiedades:

- $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \subset A \cup B$ $\quad$ $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \cap B \subset A$
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \subset B \iff A \cup B = B$ $\quad$ $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \subset B \iff A \cap B = A$
- $\forall A \in \mathscr{P}(X), \varnothing - A = \varnothing$ $\quad$ $\forall A \in \mathscr{P}(X), A - \varnothing = A$
- $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cup A = A$ $\quad$ $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cap A = A$ **(idempotencia)**
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \cup (A \cap B) = A$ $\quad$ $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \cap (A \cup B) = A$ **(absorción)**
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \cup B = B \cup A$ $\quad$ $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), A \cap B = B \cap A$ **(conmutatividad)**
- $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(X), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad$ $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(X), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ **(asociatividad)**
- $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(X), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(X), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(distributividad)**
- $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cup \varnothing = A$ $\quad$ $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cap X = A$ **(elem. neutros)**
- $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cup X = X$ $\quad$ $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cap \varnothing = \varnothing$ **(elem. absorbentes)**
- $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cup \overline{A} = X$ $\quad$ $\forall A \in \mathscr{P}(X), A \cap \overline{A} = \varnothing$ **(el. complementarios)**
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad$ $\forall A, B \in \mathscr{P}(X), \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **(De Morgan)**

Sección 3

Funciones entre conjuntos

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A, B se define el **producto cartesiano** de A y B:

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A \wedge y \in B\}$$

y a sus elementos (x, y) se les denomina **pares ordenados**

Dados n conjuntos $X_1, X_2, \cdots X_n$ se define:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, x_j \in X_j, j \in \{1, \cdots, n\}\}$$

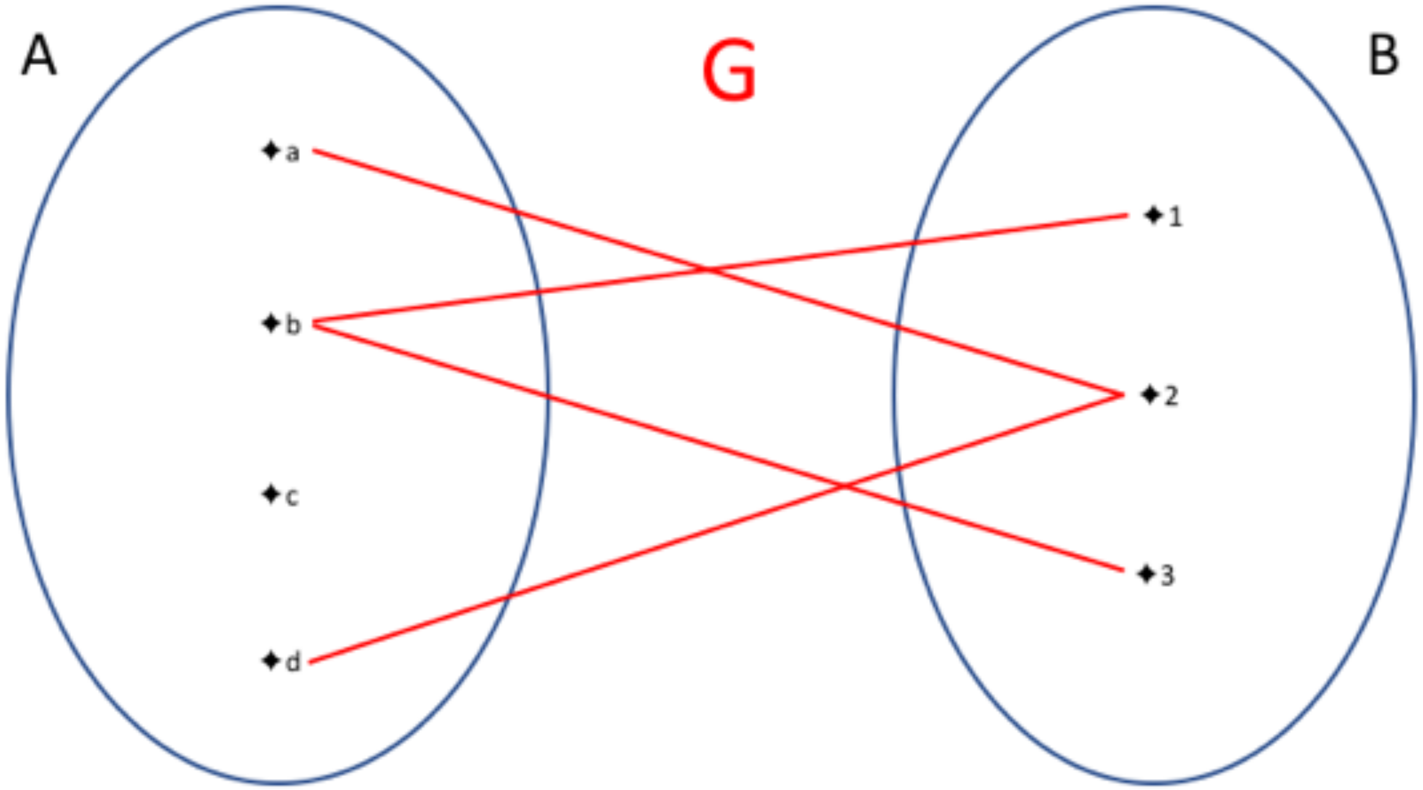
y a sus elementos se les denomina tuplas o **n-tuplas**

Grafo

Dados dos conjuntos A, B se define **correspondencia** o **grafo** G a cualquier subconjunto $G \subset A \times B$

Se dice que A es el **dominio** de G y que B es el **codominio** de G

Grafo inverso del grafo G: $G^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in G\}$



$$G = \{(a,2), (b,1), (b,3), (d,2)\}$$

$$G^{-1} = \{(2,a), (1,b), (3,b), (2,d)\}$$

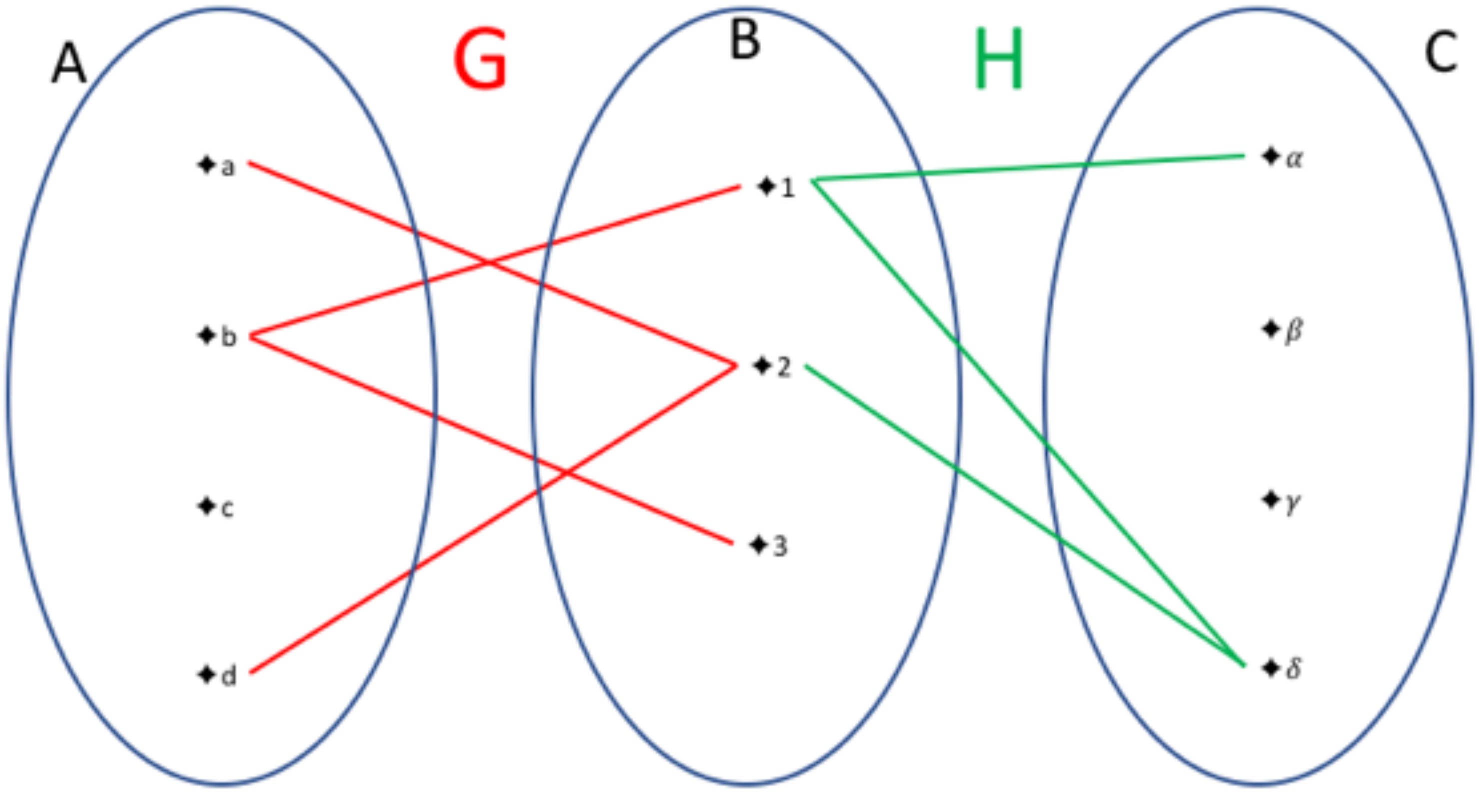
Composición de grafos $G \subset A \times B$ y $H \subset B \times C$ $\quad H \circ G = \{(x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B, (x,y) \in G \wedge (y,z) \in H\}$

Propiedades:

I. $K \circ (H \circ G) = (K \circ H) \circ G$

II. $(H \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ H^{-1}$

III. $(G^{-1})^{-1} = G$



$$G = \{(a,2), (b,1), (b,3), (d,2)\}$$

$$H = \{(1,\alpha), (1,\delta), (2,\delta)\}$$

$$H \circ G = \{(a,\delta), (b,\alpha), (b,\delta), (d,\delta)\}$$

Función

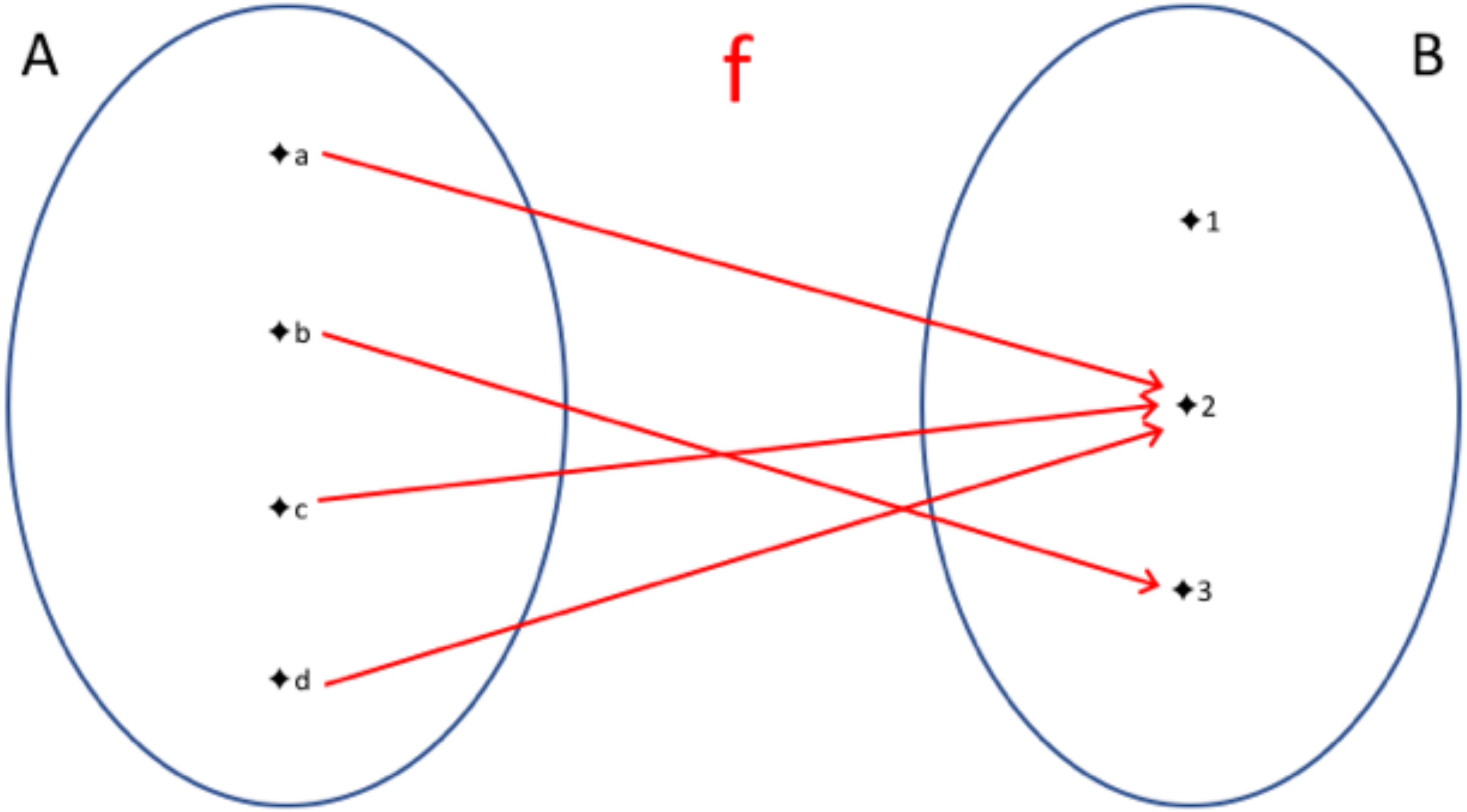
Dados dos conjuntos A, B se define **función** o **aplicación** de A en B a un **grafo** $f \subset A \times B$ que:

I. $\forall x \in A, \exists y \in B, (x, y) \in f$

II. $\forall x \in A, (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z$

Notaciones:

(f, A, B) $\qquad$ $(x, y) \in f \iff y = f(x)$ $\qquad$ $\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$



Se dice que A es el **dominio** de f y que B es el **codominio** de f

Se dice que y es la **imagen de** x por f, o que x es **preimagen** de y mediante f

Igualdad: $(f, A, B) = (g, C, D) \iff A = C \wedge B = D \wedge \forall x \in A, f(x) = g(x)$

Función identidad: $i_A : A \to A, \forall x \in A, i_A(x) = x$

Imagen de $X \subset A$: $f(X) = \{y \in B \,|\, \exists x \in X, y = f(x)\}$

Recorrido, **rango** o **imagen de f**: $\text{Im}(f) = f(A)$

Imagen inversa o **preimagen** de $Y \subset B$: $f^{-1}(Y) = \{x \in A \,|\, f(x) \in Y\}$

Propiedades:

I. $f(\varnothing) = \varnothing$

II. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

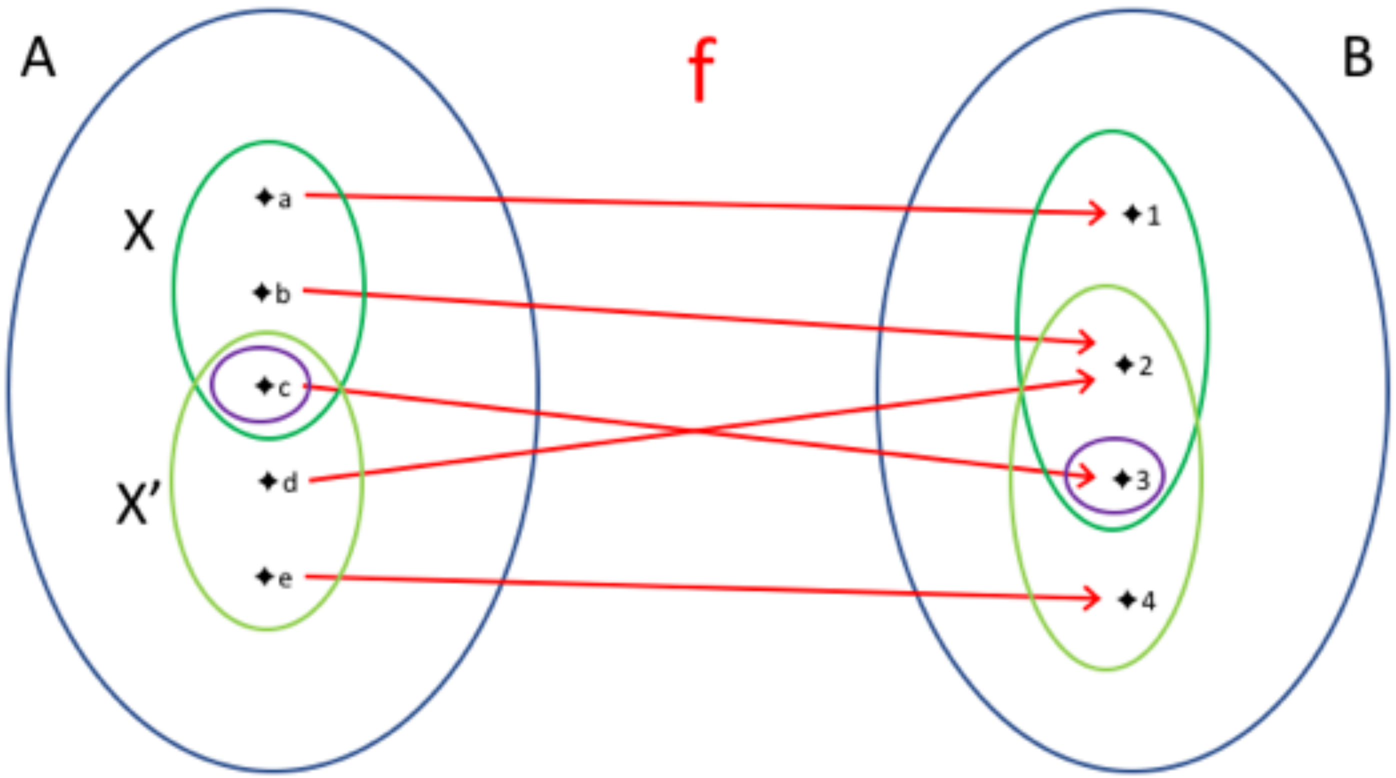
III. $\forall X, X' \in \mathscr{P}(A), X \subset X' \implies f(X) \subset f(X')$

IV. $\forall X, X' \in \mathscr{P}(A), f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$

V. $\forall X, X' \in \mathscr{P}(A), f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$

VI. $\forall Y, Y' \in \mathscr{P}(B), f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$

VII. $\forall Y, Y' \in \mathscr{P}(B), f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$



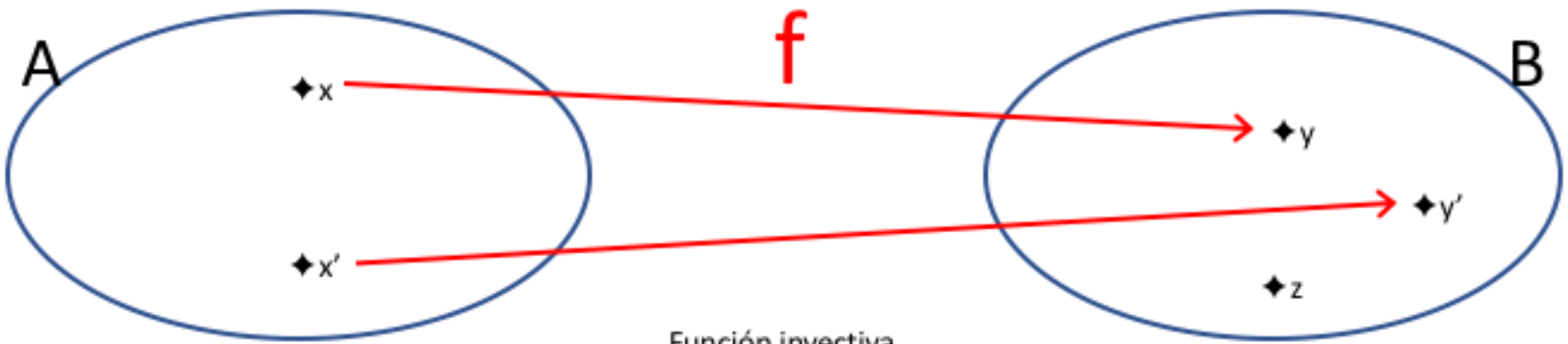
Inyectividad: $f : A \to B$ es inyectiva $\iff \forall x, x' \in A, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

(equiv.) $\iff \forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \implies x = x'$

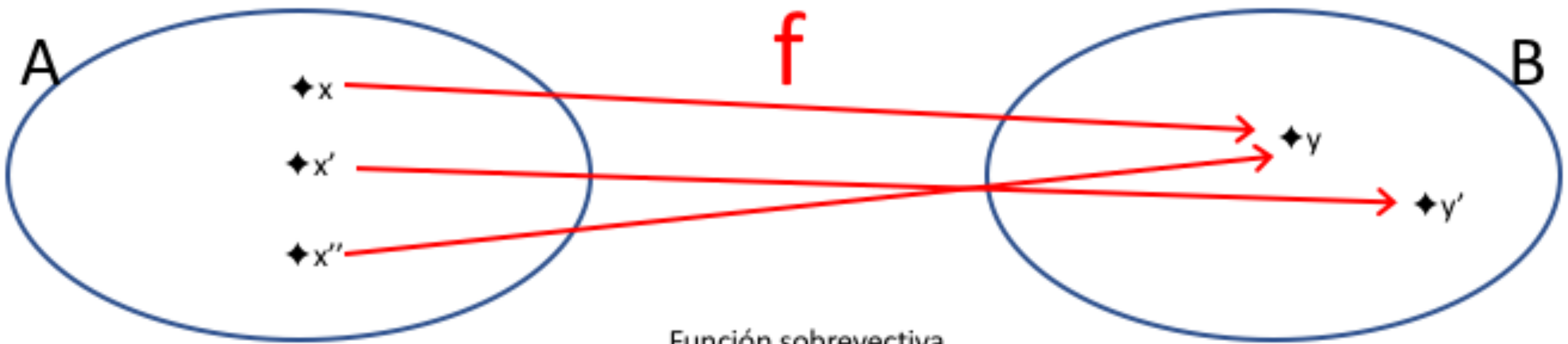
Sobreyectividad: $f : A \to B$ es sobreyectiva o suprayectiva o sobre $\iff \forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$

(equiv.) $\iff B = f(A)$

Biyectividad: $f : A \to B$ es biyectiva o biunívoca $\iff f$ es inyectiva y sobreyectiva



Función inyectiva



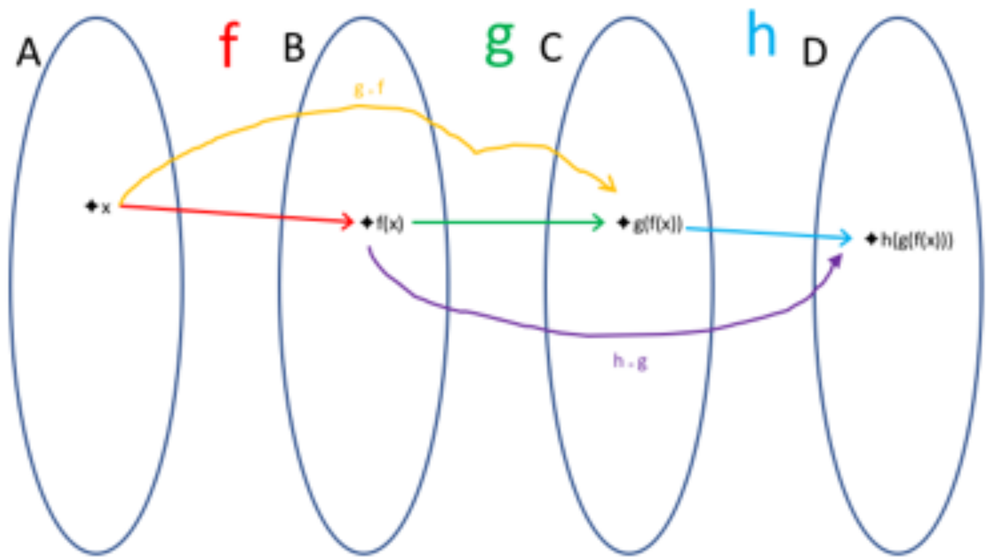
Función sobreyectiva

Composición de funciones: Siendo $f : A \to B$ y $g : B \to C$ se denomina aplicación compuesta de f y g a la aplicación

$$g \circ f : A \to C, \quad \forall x \in A, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Propiedades:

I. Asociatividad: $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D \implies (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$



II. En general no es conmutativa

Contraejemplo: $\left.\begin{array}{l} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x \\ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} (g \circ f)(x) = (2x)^2 = 4x^2 \\ (f \circ g)(x) = 2(x^2) = 2x^2 \end{array}\right.$

III. f, g inyectivas $\implies$ $g \circ f$ inyectiva

IV. f, g sobreyectivas $\implies$ $g \circ f$ sobreyectiva

V. f, g biyectivas $\implies$ $g \circ f$ biyectiva

VI. $g \circ f$ inyectiva $\implies$ f inyectiva

VII. $g \circ f$ sobreyectiva $\implies$ g sobreyectiva

Función inversa: Toda aplicación, por ser grafo, tiene grafo inverso. Este, sin embargo, no siempre es función.

$$f : A \to B \text{ admite (función) inversa } \iff \exists g : B \to A, g \circ f = i_A \wedge f \circ g = i_B \text{ y se denota } g = f^{-1}$$

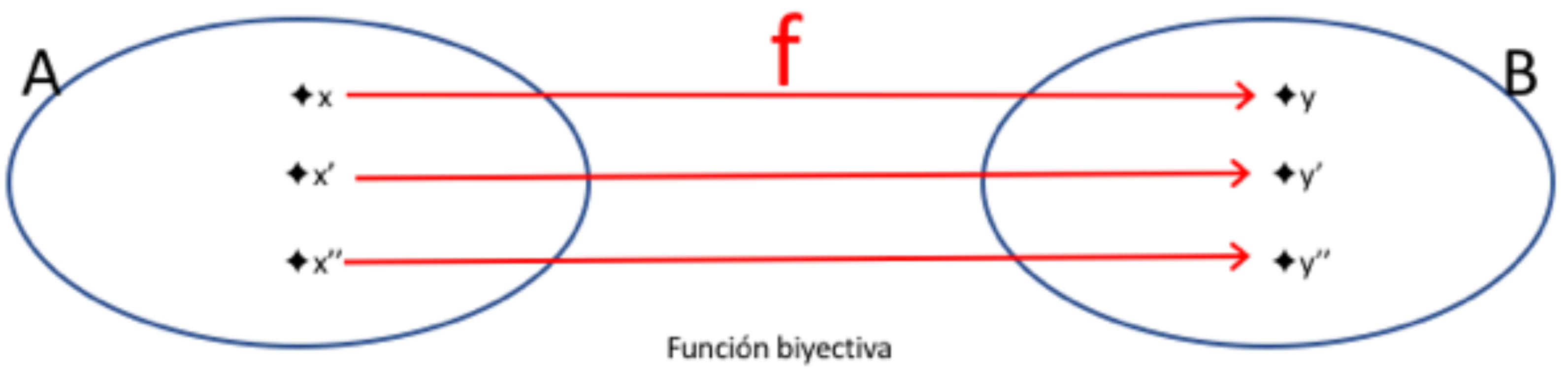
(Recuérdese que la función identidad es $i_A : A \to A, \forall x \in A, i_A(x) = x$ y nótese que es una función biyectiva)

Propiedades:

I. f admite inversa $\implies f^{-1}$ es única

II. f admite inversa $f^{-1} \iff f$ es biyectiva

III. f, g admiten inversa $\implies g \circ f$ admite inversa y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Función biyectiva

Su inversa

Sección 4

Grupos, anillos y cuerpos

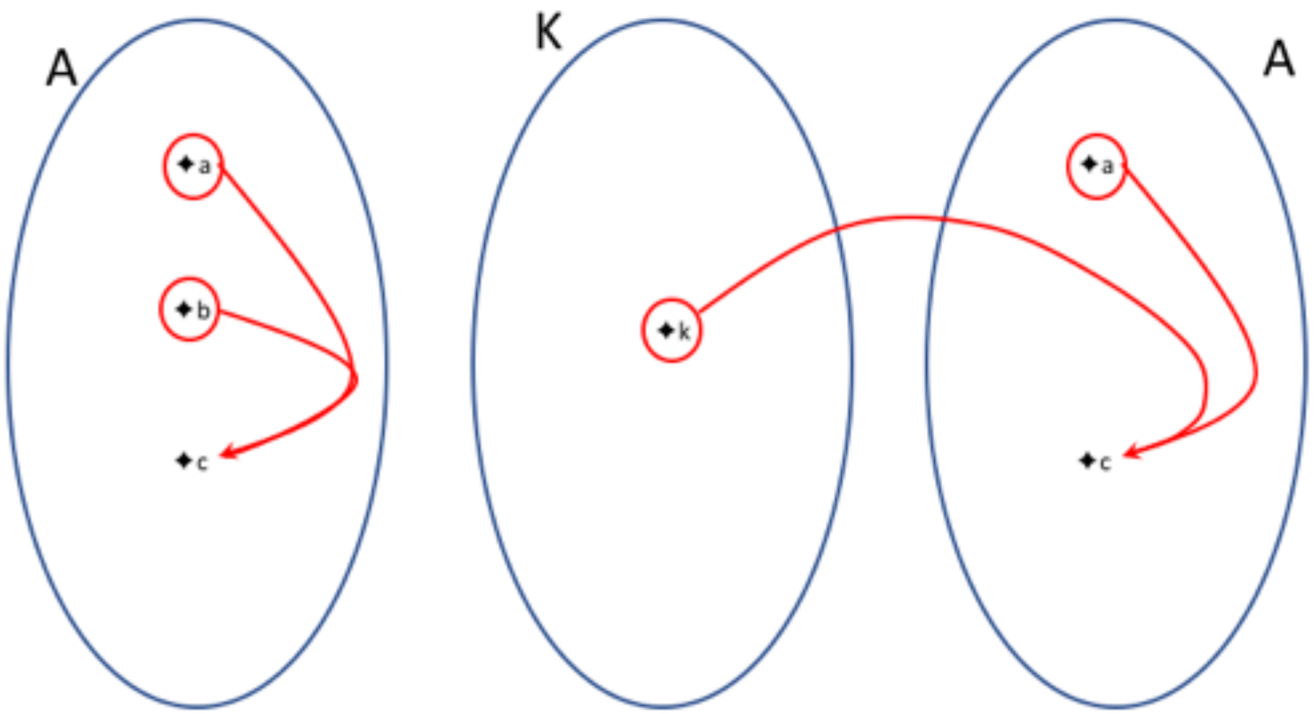
Operaciones

Dado un conjunto $A \neq \varnothing$ definimos una operación o **ley de composición interna**:

$$\star : A \times A \to A \qquad \forall a, b \in A, c = \star\,(a, b) = a \star b \quad (c \in A)$$

Dados un conjunto $A \neq \varnothing$ y otro $K \neq \varnothing$ definimos una operación o **ley de composición externa**:

$$\diamond : K \times A \to A \qquad \forall a \in A, \forall k \in K, c = \diamond\,(k, a) = k \diamond a \quad (c \in A)$$



Ley de composición interna

Ley de composición externa

Posibles propiedades de una ley de composición interna $\star : A \times A \to A$

Asociatividad:	$\star$ es asociativa	$\iff \forall a, b, c \in A, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
Comnutatividad:	$\star$ es conmutativa	$\iff \forall a, b \in A, a \star b = b \star a$
Elemento neutro:	$\star$ tiene elemento neutro	$\iff \exists n \in A, \forall a \in A, a \star n = n \star a = a$
Elemento simétrico:	$a \in A$ tiene elemento simétrico	$\iff \exists a' \in A, a \star a' = a' \star a = n$ (exige elemento neutro)
Elemento idempotente:	$a \in A$ es idempotente	$\iff a \star a = a$
Elemento absorbente:	$a \in A$ es absorbente	$\iff \forall b \in A, a \star b = b \star a = a$
Elemento regular:	$a \in A$ es regular o simplificable	$\iff \begin{cases} \forall b, c \in A, a \star b = a \star c \implies b = c \\ \forall b, c \in A, b \star a = c \star a \implies b = c \end{cases}$
Idempotencia:	$\star$ es idempotente	$\iff \forall a \in A, a \star a = a$
Ley de simplificación o cancelativa:	A es regular para $\star$	$\iff \forall a \in A, a$ es regular

Con dos leyes de composición interna $\star : A \times A \to A$ y $\diamond : A \times A \to A$

Si ambas operaciones tienen elemento neutro se les suele denominar **elemento cero** (0) y **elemento unidad** (1), respectivamente. En algunos casos se emplearán los símbolos $\perp$ y $\top$ u otros

Distributividad: $\star$ es distributiva respecto de $\diamond$ $\iff \forall a, b, c \in A, \begin{cases} a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c) \\ (b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a) \end{cases}$

Elemento invertible[†]**:** $a \in A$ es invertible $\iff \exists a^{-1} \in A, a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = 1$

Divisor de 0: $a \in A, a \neq 0$ es divisor de 0 $\iff \exists b \in A - \{0\}, a \diamond b = 0 \vee b \diamond a = 0$

$(\mathbf{A}, \star, \diamond)$ no tiene divisores de 0 $\iff a \diamond b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$

Complementario[‡]**:** $a \in A$ admite complementario $\iff \exists \bar{a} \in A, \begin{cases} a \star \bar{a} = \top \\ a \diamond \bar{a} = \perp \end{cases}$

[†]Es el elemento simétrico respecto a la segunda operación cuando esta se denomina *producto*. Cuando existe se le denomina elemento inverso. Al elemento simétrico respecto de la primera operación cuando esta se denomina *suma* se le denomina elemento opuesto

[‡]En este caso, los elementos neutros se han denominado $\perp$ (neutro de $\star$) y $\top$ (neutro de $\diamond$)

Ejemplo: Z_n

Sea $\mathbf{Z}_n = \{0,1,2,\cdots,n-1\}$, definimos:

$$\oplus : \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n \quad \forall x,y \in \mathbf{Z}_n, \quad x \oplus y = x + y \mod n$$
$$\odot : \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n \quad \forall x,y \in \mathbf{Z}_n, \quad x \odot y = x \cdot y \mod n$$

$$\mathbf{Z}_2 = \{0,1\} \begin{Bmatrix} 0 \oplus 0 = 0 & , & 0 \oplus 1 = 1 & , & 1 \oplus 0 = 1 & , & 1 \oplus 1 = 0 \\ 0 \odot 0 = 0 & , & 0 \odot 1 = 0 & , & 1 \odot 0 = 0 & , & 1 \odot 1 = 1 \end{Bmatrix}$$

Las operaciones las podemos representar mediante **tablas de Cayley**

$\mathbf{Z}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbf{Z}_3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbf{Z}_4$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\mathbf{Z}_5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Principales estructuras algebraicas para $(A, \star)$

$$\star : A \times A \to A$$

	Operación interna	Asociativa	Elemento neutro	Elemento inverso	Conmutativa
Magma	Si				
Semigrupo	Si	Si			
Semigrupo conmutativo	Si	Si			Si
Monoide (semigrupo con elemento neutro)	Si	Si	Si		
Monoide conmutativo	Si	Si	Si		Si
Grupo	Si	Si	Si	Si	
Grupo conmutativo o abeliano	Si	Si	Si	Si	Si

Principales estructuras algebraicas para $(A, \star, \diamond)$

$$\star : A \times A \to A \qquad \diamond : A \times A \to A$$

	$(A, \star)$	$(A, \diamond)$	$\diamond$ distributiva resp. $\star$	$\diamond$ sin divisores de 0
Anillo	Grupo conmutativo	Semigrupo	Si	
Anillo conmutativo	Grupo conmutativo	Semigrupo conmutativo	Si	
Anillo unitario	Grupo conmutativo	Monoide	Si	
Anillo conmutativo unitario	Grupo conmutativo	Monoide conmutativo	Si	
Anillo íntegro	Grupo conmutativo	Semigrupo	Si	Si
Dominio de integridad	Grupo conmutativo	Monoide conmutativo	Si	Si
Cuerpo	Grupo conmutativo	Grupo (*)	Si	(propiedad)
Campo o cuerpo conmutativo	Grupo conmutativo	Grupo conmutativo (*)	Si	(propiedad)

(*) En el caso del cuerpo y del cuerpo conmutativo, $(A - \{0\}, \diamond)$ ha de ser grupo o grupo conmutativo, respectivamente, ya que 0 nunca es invertible

Principales estructuras algebraicas para $(A, \star, \diamond)$

$$\star : A \times A \to A \qquad \diamond : A \times A \to A$$

Álgebra de Boole $(\mathbf{A}, \star, \diamond)$:

I. $\star, \diamond$ conmutativas: $\begin{cases} \forall a, b \in A, a \star b = b \star a \\ \forall a, b \in A, a \diamond b = b \diamond a \end{cases}$

II. $\star, \diamond$ tienen elementos neutros $\bot$, $\top$: $\begin{cases} \exists \bot \in A, \forall a \in A, a \star \bot = \bot \star a = a \\ \exists \top \in A, \forall a \in A, a \diamond \top = \top \diamond a = a \end{cases}$

III. Todo elemento admite elemento complementario: $\forall a \in A, \exists \overline{a} \in A, \begin{cases} a \star \overline{a} = \overline{a} \star a = \top \\ a \diamond \overline{a} = \overline{a} \diamond a = \bot \end{cases}$

IV. $\diamond$ es distributiva respecto de $\star$: $\forall a, b, c \in A, \begin{cases} a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c) \\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a) \end{cases}$

V. $\star$ es distributiva respecto de $\diamond$: $\forall a, b, c \in A, \begin{cases} a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c) \\ (b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a) \end{cases}$

Ejemplos

- $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap)$ (elementos neutros, $\varnothing$ y X)
- $(\{V, F\}, \vee, \wedge)$ (elementos neutros, F y V)
- $(\{0,1\}, \oplus, \odot)$ (elementos neutros, 0 y 1)

Propiedades

- Si $(A, \star)$ tiene elemento neutro $n \in A$, es único:

$$\left.\begin{array}{r} n \text{ elemento neutro} \\ n' \text{ elemento neutro} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n \star n' = n' \star n = n' \\ n' \star n = n \star n' = n \end{array}\right\} \Longrightarrow n = n'$$

- Si $(A, \star)$ es monoide, el elemento simétrico, si existe, es único:

$$\left.\begin{array}{r} a' \text{ simétrico de } a \\ a'' \text{ simétrico de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow a'' = a'' \star n = a'' \star (a \star a') = (a'' \star a) \star a' = n \star a' = a'$$

- a' simétrico de $a \Longrightarrow a$ simétrico de a' (es decir $(a')' = a$)

Propiedades de los grupos

- Todos los elementos son regulares (ley de simplificación o ley cancelativa):

$$\left\{\begin{array}{l} a, x, y \in A, a \star x = a \star y \Longrightarrow a' \star (a \star x) = a' \star (a \star y) \Longrightarrow (a' \star a) \star x = (a' \star a) \star y \Longrightarrow n \star x = n \star y \Longrightarrow x = y \\ a, x, y \in A, x \star a = y \star a \Longrightarrow (x \star a) \star a' = (y \star a) \star a' \Longrightarrow x \star (a \star a') = y \star (a \star a') \Longrightarrow x \star n = y \star n \Longrightarrow x = y \end{array}\right.$$

- $\forall a, b \in A, (a \star b)' = b' \star a'$

$$\left.\begin{array}{r} (a \star b) \star (b' \star a') = ((a \star b) \star b') \star a' = (a \star (b \star b')) \star a' = (a \star n) \star a' = a \star a' = n \\ (b' \star a') \star (a \star b) = b' \star (a' \star (a \star b) = b' \star ((a' \star a) \star b) = b' \star (n \star b) = b' \star b = n \end{array}\right\} \Longrightarrow (a \star b)' = b' \star a'$$

- $a \in A, a \star a = a \iff a = n$ (el único elemento idempotente es el neutro)

$$a \star a = a \implies a' \star (a \star a) = a' \star a \implies n \star a = n \implies a = n$$
$$a = n \implies a \star a = a \star n \implies a \star a = a$$

Propiedades de los anillos[†]

[†]En adelante se empleará el anillo $(A, \oplus, \odot)$, denotándose los elementos neutros como 0 y 1, y a los simétricos de $a \in A$ como $(-a)$ y a^{-1} respectivamente de las operaciones $\oplus, \odot$

- $\forall a \in A, a \odot 0 = 0 \odot a = 0$ (El elemento neutro de $\oplus$ es absorbente para $\odot$)

$$a \odot 0 = a \odot (0 \oplus 0) = (a \odot 0) \oplus (a \odot 0) \implies 0 = -(a \odot 0) \oplus (a \odot 0) = -(a \odot 0) \oplus (a \odot 0) \oplus (a \odot 0) \implies 0 = (a \odot 0)$$
$$0 \odot a = (0 \oplus 0) \odot a = (0 \odot a) \oplus (0 \odot a) \implies 0 = -(0 \odot a) \oplus (0 \odot a) = -(0 \odot a) \oplus (0 \odot a) \oplus (0 \odot a) \implies 0 = (0 \odot a)$$

- $\forall a, b \in A, (-a) \odot b = a \odot (-b) = -(a \odot b)$

$$(a \odot b) \oplus ((-a) \odot b) = (a \oplus (-a)) \odot b = 0 \odot b = 0 \implies -(a \odot b) = (-a) \odot b$$
$$(a \odot b) \oplus (a \odot (-b)) = a \odot (b \oplus (-b)) = a \odot 0 = 0 \implies -(a \odot b) = a \odot (-b)$$

- $\forall a, b \in A, (-a) \odot (-b) = a \odot b$

$$((-a) \odot (-b)) = -(a \odot (-b)) = -(-(a \odot b)) = a \odot b$$

- 0 no es simplificable

$$\forall a, b \in A, a \odot 0 = b \odot 0 = 0 \implies \exists a, b \in A, a \neq b \wedge a \odot 0 = b \odot 0$$
$$\forall a, b \in A, 0 \odot a = 0 \odot b = 0 \implies \exists a, b \in A, a \neq b \wedge 0 \odot a = 0 \odot b$$

- $\forall a \in A, a \neq 0,\ a$ divisor de cero $\iff$ a no simplificable

$a \in A, a \neq 0$, simplificable y $b \in A$, $\begin{cases} 0 = a \odot b = a \odot 0 \implies b = 0 \\ 0 = b \odot a = 0 \odot a \implies b = 0 \end{cases} \implies \nexists b \in A, b \neq 0, a \odot b = 0 \vee b \odot a = 0$

$\implies$ a no es divisor de cero

$a \in A, a \neq 0$, no divisor de cero, $b, c \in A$,

$$\begin{cases} (a \odot b) = (a \odot c) \implies (a \odot b) \oplus (-(a \odot c)) = 0 \implies (a \odot b) \oplus (a \odot (-c)) = 0 \implies a \odot (b \oplus (-c)) = 0 \\ (b \odot a) = (c \odot a) \implies (b \odot a) \oplus (-(c \odot a)) = 0 \implies (b \odot a) \oplus ((-c) \odot a) = 0 \implies (b \oplus (-c)) \odot a = 0 \end{cases}$$

$\implies b = c \implies$ a es simplificable

Propiedades de los anillos unitarios

- $\forall a \in A, (-a) = (-1) \odot a$

$(-1) \odot a = 1 \odot (-a) = -(1 \odot a) = -a$

- $a, b \in A$ invertibles $\implies$ $a \odot b$ invertible y $(a \odot b)^{-1} = b^{-1} \odot a^{-1}$

$(a \odot b) \odot (b^{-1} \odot a^{-1}) = (a \odot (b \odot b^{-1})) \odot a^{-1} = (a \odot 1) \odot a^{-1} = a \odot a^{-1} = 1 \implies (a \odot b)^{-1} = (b^{-1} \odot a^{-1})$

- $a \in A$ invertible $\implies -a$ invertible y $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

$(-a) \odot (-(a^{-1})) = -((-a) \odot a^{-1}) = -(-(a \odot a^{-1})) = -(-1) = 1 \implies (-a)^{-1} = -(a^{-1})$

- $a \in A$ invertible $\implies$ a no es divisor de cero ($a \in A$ es divisor de cero $\implies$ a no es invertible)

$$a \neq 0, \text{ invertible } \implies \left.\begin{cases} a \odot b = 0 \implies a^{-1} \odot (a \odot b) = a^{-1} \odot 0 \implies 1 \odot b = 0 \\ b \odot a = 0 \implies (b \odot a) \odot a^{-1} = 0 \odot a^{-1} \implies b \odot 1 = 0 \end{cases}\right\} \implies b = 0$$

- $0 \in A$ no es invertible

$$\forall a \in A, 0 \odot a = 0 \wedge a \odot 0 = 0 \implies \nexists 0^{-1} \in A, 0 \odot 0^{-1} = 0^{-1} \odot 0 = 1$$

Propiedades de los cuerpos

- No tiene divisores de cero

$$\forall a, a \neq 0 \implies \exists a^{-1} \in A \implies a \text{ no es divisor de cero}$$

- $a \neq 0, \forall b, c \in A, (a \odot x) \oplus b = c$ y $(x \odot a) \oplus b = c$ tienen solución única en x

$$((a \odot x) \oplus b) \oplus (-b) = c \oplus (-b) \implies a \odot x = c \oplus (-b) \implies a^{-1} \odot (a \odot x) = a^{-1} \odot (c \oplus (-b)) \implies x = a^{-1} \odot (c \oplus (-b))$$

$$((x \odot a) \oplus b) \oplus (-b) = c \oplus (-b) \implies x \odot a = c \oplus (-b) \implies (x \odot a) \oplus a^{-1} = (c \oplus (-b)) \odot a^{-1} \implies x = (c \oplus (-b)) \odot a^{-1}$$

Propiedades de las álgebras de Boole

- $\forall a \in A, a \star a = a \wedge a \diamond a = a$ (idempotencia)

$$a \star a = (a \star a) \diamond \top = (a \star a) \diamond (a \star \bar{a}) = a \star (a \diamond \bar{a}) = a \star \perp = a$$
$$a \diamond a = (a \diamond a) \star \perp = (a \diamond a) \star (a \diamond \bar{a}) = a \diamond (a \star \bar{a}) = a \diamond \top = a$$

- $\forall a \in A, a \star \top = \top \wedge a \diamond \perp = \perp$ (neutros cruzados absorbentes)

$$a \star \top = (a \star \top) \diamond \top = (a \star \top) \diamond (a \star \bar{a}) = a \star (\top \diamond \bar{a}) = a \star \bar{a} = \top$$
$$a \diamond \perp = (a \diamond \perp) \star \perp = (a \diamond \perp) \star (a \diamond \bar{a}) = a \diamond (\perp \star \bar{a}) = a \diamond \bar{a} = \perp$$

- $\forall a, b \in A, a \diamond (a \star b) = a \wedge a \star (a \diamond b) = a$ (absorción)

$$a \diamond (a \star b) = (a \star \perp) \diamond (a \star b) = a \star (\perp \diamond b) = a \star \perp = a$$
$$a \star (a \diamond b) = (a \diamond \top) \star (a \diamond b) = a \diamond (\top \star b) = a \diamond \top = a$$

- $\forall a, b, c \in A, a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \wedge a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$ (asociativa)

$$\left.\begin{array}{l} p = a \star (b \star c) \implies a \diamond p = a \diamond (a \star (b \star c)) = a \\ q = (a \star b) \star c \implies a \diamond q = a \diamond ((a \star b) \star c) = (a \diamond (a \star b)) \star (a \diamond c) = a \star (a \diamond c) = a \end{array}\right\} \implies a \diamond p = a \diamond q$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a} \diamond p = \bar{a} \diamond (a \star (b \star c)) = (a \diamond \bar{a}) \star (\bar{a} \diamond (b \star c)) = \perp \star (\bar{a} \diamond (b \star c)) = \bar{a} \diamond (b \star c) \\ \bar{a} \diamond q = \bar{a} \diamond ((a \star b) \star c) = (\bar{a} \diamond (a \star b)) \star (\bar{a} \diamond c) = ((\bar{a} \diamond a) \star (\bar{a} \diamond b)) \star (\bar{a} \diamond c) = \\ \qquad = (\perp \star (\bar{a} \diamond b)) \star (\bar{a} \diamond c) = \bar{a} \diamond (b \star c) \end{array}\right\} \implies \bar{a} \diamond p = \bar{a} \diamond q$$

$$\implies (a \diamond p) \star (\bar{a} \diamond p) = (a \diamond q) \star (\bar{a} \diamond q) \implies (a \star \bar{a}) \diamond p = \implies (a \star \bar{a}) \diamond q \implies \top \diamond p = \top \diamond q \implies p = q$$

(demostración dual para el otro caso, con $p' = a \diamond (b \diamond c) \wedge q' = (a \diamond b) \diamond c$)

- $\forall a \in A, \exists! \overline{a} \in A, a \star \overline{a} = \top \wedge a \diamond \overline{a} = \bot$ (el complementario es único)

$$\overline{a}, \overline{a}' \in A, a \star \overline{a} = \top \wedge a \diamond \overline{a} = \bot \wedge a \star \overline{a}' = \top \wedge a \diamond \overline{a}' = \bot \implies$$
$$\overline{a} = \overline{a} \diamond \top = \overline{a} \diamond (a \star \overline{a}') = (\overline{a} \diamond a) \star (\overline{a} \diamond \overline{a}') = \bot \star (\overline{a} \diamond \overline{a}') = (\overline{a} \diamond \overline{a}') =$$
$$= (\overline{a} \diamond \overline{a}') \star \bot = (\overline{a} \diamond \overline{a}') \star (a \diamond \overline{a}') = (\overline{a} \star a) \diamond \overline{a}' = \top \diamond \overline{a}' = \overline{a}'$$

- $\forall a \in A, \overline{(\overline{a})} = a$ (doble complementación)

$$\forall a \in A, \exists \overline{a}, a \star \overline{a} = \top \wedge a \diamond \overline{a} = \bot \implies \overline{a} \star a = \top \wedge \overline{a} \diamond a = \bot \implies \overline{(\overline{a})} = a$$

- $\overline{\top} = \bot \wedge \overline{\bot} = \top$ (complementación de neutros)

$$\left.\begin{array}{l} \top \star \bot = \top \wedge \top \diamond \top = \top \\ \bot \star \bot = \bot \wedge \bot \diamond \top = \top \end{array}\right\} \implies \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \bot \star \top = \top \\ \bot \diamond \top = \top \end{array}\right\} \implies \overline{\bot} = \top \\ \left.\begin{array}{l} \top \star \bot = \top \\ \top \diamond \bot = \top \end{array}\right\} \implies \overline{\bot} = \top \end{cases}$$

- $\forall a, b \in A, \overline{(a \star b)} = \overline{a} \diamond \overline{b} \wedge \overline{(a \diamond b)} = \overline{a} \star \overline{b}$ (leyes de De Morgan)

$$(a \star b) \star (\overline{a} \diamond \overline{b}) = ((a \star b) \star \overline{a}) \diamond ((a \star b) \star \overline{b}) = (b \star (a \star \overline{a})) \diamond (a \star (b \star \overline{b})) = (b \star \top) \diamond (a \star \top) = \top \diamond \top = \top$$
$$(a \star b) \diamond (\overline{a} \diamond \overline{b}) = (a \diamond (\overline{a} \diamond \overline{b})) \star (b \diamond (\overline{a} \diamond \overline{b})) = ((a \diamond \overline{a}) \diamond \overline{b}) \star ((b \diamond \overline{b}) \diamond \overline{a}) = (\bot \diamond \overline{b}) \star (\bot \diamond \overline{a}) = \bot \star \bot = \bot$$

$$\implies \overline{(a \star b)} = \overline{a} \diamond \overline{b}$$

$$(a \diamond b) \star (\overline{a} \star \overline{b}) = (a \star (\overline{a} \star \overline{b})) \diamond (b \star (\overline{a} \star \overline{b})) = ((a \star \overline{a}) \star \overline{b}) \diamond ((b \star \overline{b}) \star \overline{a}) = (\top \star \overline{b}) \diamond (\top \star \overline{a}) = \top \diamond \top = \top$$
$$(a \diamond b) \diamond (\overline{a} \star \overline{b}) = ((a \diamond b) \diamond \overline{a}) \star ((a \diamond b) \diamond \overline{b}) = (b \diamond (a \diamond \overline{a})) \star (a \diamond (b \diamond \overline{b})) = (b \diamond \bot) \star (a \diamond \bot) = \bot \star \bot = \bot$$

$$\implies \overline{(a \diamond b)} = \overline{a} \star \overline{b}$$

Subestructuras algebraicas

Sea $(A, \star)$ grupo y $S \subset A$. Si $(S, \star)$ es grupo decimos que $(S, \star)$ es subgrupo de $(A, \star)$
Sea $(A, \star, \diamond)$ anillo y $S \subset A$. Si $(S, \star, \diamond)$ es anillo decimos que $(S, \star, \diamond)$ es subanillo de $(A, \star, \diamond)$
Sea $(A, \star, \diamond)$ cuerpo y $S \subset A$. Si $(S, \star, \diamond)$ es cuerpo decimos que $(S, \star, \diamond)$ es subcuerpo de $(A, \star, \diamond)$

Ejemplos

$(\mathbf{Z}, +), (\mathbf{Q}, +), (\mathbf{R}, +), (\mathbf{C}, +)$	son grupos abelianos
$(\mathbf{Z}_n, +)$	es grupo abeliano
$(\mathbf{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbf{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$	son grupos abelianos
$(M_{m\times n}(\mathbf{R}), +)$	es grupo abeliano
$(\mathbf{N}, +)$	es semigrupo conmutativo
$(\mathbf{Z}, \cdot), (\mathbf{Q}, \cdot), (\mathbf{R}, \cdot), (\mathbf{C}, \cdot)$	son monoides conmutativos
$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$	es anillo conmutativo unitario (dominio de integridad)
$(\mathbf{Q}, +, \cdot), (\mathbf{R}, +, \cdot), (\mathbf{C}, +, \cdot)$	son cuerpos conmutativos
$(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \cdot)$	es anillo unitario (no conmutativo, tiene divisores de cero)
$(F(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \cdot)$	es anillo conmutativo unitario (tiene divisores de cero)
$(\mathbf{Q}[X], +, \cdot), (\mathbf{R}[X], +, \cdot), (\mathbf{C}[X], +, \cdot)$	son anillos conmutativos unitarios (dominios de integridad)
$(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$	es anillo conmutativo unitario (tiene divisores de 0) si n no es primo y cuerpo conmutativo si n es primo
$(\mathbf{Z}, +), (\mathbf{Q}, +), (\mathbf{R}, +), (\mathbf{C}, +)$	son subgrupos (cada uno de los que le siguen)
$(\mathbf{Q}, +, \cdot), (\mathbf{R}, +, \cdot), (\mathbf{C}, +, \cdot)$	son subcuerpos (cada uno de los que le siguen)

Álgebra matricial y sist. de ecs. lineales

- **Método de eliminación de Gauss**
- **Rango de una matriz**
- **Operaciones con matrices**
- **Inversa de una matriz**

Sección 1

Método de eliminación de Gauss

Definiciones

Se denomina **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a una expresión de la forma:

$$(\dagger) \qquad \left.\begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\cdots,m\}, j \in \{1,2,\cdots,n\}$$

Coeficientes del sistema: elementos $a_{ij}, \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\cdots,m\}, j \in \{1,2,\cdots,n\}$

Términos independientes del sistema: elementos $b_i \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\cdots,m\}$

Incógnitas: los elementos desconocidos $x_i \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\cdots,n\}$

Una **solución** del sistema son n elementos $s_1, s_2, \cdots, s_n \in \mathbb{K}$ tales que al sustituir cada x_i por s_i se obtienen m igualdades

Sistema compatible: tiene al menos una solución, **determinado,** si tiene solamente una, e **indeterminado** si tiene más de una

Sistema incompatible: no tiene ninguna solución

Sistema homogéneo: el que es de la forma:

$$(\ddagger) \qquad \left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema (‡) obtenido a partir de (†) se le denomina **sistema homogéneo asociado** a (†)

Métodos

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

1. Método de igualación
2. Método de sustitución
3. Método de reducción o eliminación
4. Método de Cramer o de los determinantes

Algunos de estos métodos no son siempre generales ni prácticos para sistemas “grandes”

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right\}$$

En esta asignatura abordaremos únicamente el método de reducción, también denominado:

método de eliminación Gaussiana o método de Gauss

Método de Gauss

Se pueden realizar las siguientes operaciones, denominadas **operaciones elementales**, con las ecuaciones del sistema:

1. Multiplicar una ecuación por un $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$
2. Intercambiar dos ecuaciones
3. Sumar a una ecuación el resultado de multiplicar cualquier otra por un $\beta \in \mathbb{K}$

El resultado de aplicar una secuencia de operaciones elementales a un sistema es otro sistema **equivalente**, es decir que tiene las mismas soluciones

El objetivo del método es lograr un sistema equivalente al dado lo más sencillo posible

Son de interés dos formas equivalentes sencillas equivalentes a un sistema dado:

I. **Forma escalonada** (no es única, y requiere operaciones adicionales para obtener posteriormente la solución)

II. **Forma escalonada reducida** (es única y da directamente la solución, si la hay única)

ambas permiten dilucidar si el sistema es compatible o incompatible y obtener fácilmente la solución o las soluciones

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{c} x_1+3x_2+x_3=-3 \\ 3x_1+9x_2+4x_3=-7 \\ 2x_1-x_2+x_3=6 \end{array}\right\}$$

1. e_2-3e_1
2. e_3-3e_1
3. $e_2 \leftrightarrow e_3$ En este momento obtenemos una forma escalonada: $\left.\begin{array}{cccc} x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & -3 \\ & -7x_2 & -x_3 & = & 12 \\ & & x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$
4. e_1-e_3
5. e_2+e_3
6. $\dfrac{-1}{7}e_2$
7. e_1-3e_2 Obtenemos la forma escalonada reducida que nos da directamente la solución única: $\left.\begin{array}{cccc} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$

En este proceso hemos "escrito" repetidamente símbolos innecesarios: $x_1, x_2, x_3, +\, , =$

Podemos eliminar los símbolos, escribiendo únicamente los coeficientes, respetando la "posición" de las incógnitas

Matrices

Disposición rectangular de coeficientes (y términos independientes), encerrada entre paréntesis:

Matriz de los coeficientes del sistema: $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Matrix ampliada del sistema: $$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathbf{M}_{m\times n+1}(\mathbb{K})$$

Las operaciones elementales que realizamos con las ecuaciones pueden hacerse con las filas de la matriz ampliada

Ejemplo: El sistema del ejemplo anterior anterior puede representarse por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y realizando sobre ella la secuencia de operaciones elementales $e_2 - 3e_1$, $e_3 - 3e_1$, $e_2 \leftrightarrow e_3$, $e_1 - e_3$, $e_2 + e_3$, $\frac{-1}{7}e_2$ y $e_1 - 3e_2$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Cuándo una matriz está en forma escalonada?

1. Puede trazarse una "escalera" descendente
2. Cada "peldaño" tiene altura 1 y está a la derecha del anterior
3. Bajo la "escalera" todos los elementos de la matriz son nulos
4. En cada esquina de un "peldaño" hay un elemento no nulo, llamado **pivote**

¿Cuándo una matriz está en forma escalonada reducida?

1. Está en forma escalonada
2. Cada pivote es la unidad
3. Sobre cada pivote los elementos son nulos

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ -2x_1+x_2+2x_3=7 \\ x_2-x_4=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=-3+\lambda \\ x_2=1 \\ x_3=\lambda \\ x_4=1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1-x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+2x_3=3 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ¡SISTEMA INCOMPATIBLE!

Teorema de Rouché-Frobenius (1.0)

Siendo:

A = matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales

p = número de peldaños de una matriz escalonada de A

$\overline{A}$ = matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales

$\overline{p}$ = número de peldaños de una matriz escalonada de $\overline{A}$

n = número de incógnitas del sistema

Un sistema de ecuaciones lineales es:

I. compatible determinado $\iff p = \overline{p} = n$

II. compatible indeterminado $\iff p = \overline{p} < n$

III. incompatible $\iff p \neq \overline{p} \qquad (p + 1 = \overline{p})$

Nota: Un sistema homogéneo siempre admite la solución trivial $0,0,\cdots,0$ y es por tanto siempre compatible ($p = \overline{p}$)

Si admite alguna más, es compatible indeterminado ($p = \overline{p} < n$).

Si solamente admite la trivial es compatible determinado ($p = \overline{p} = n$)

Ejemplos

Resolver en $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ $\quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Resolver en $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ $\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Sección 2

Rango de una matriz

Vectores

Podemos agrupar las soluciones de un sistema lineal, $s_1, s_2, \cdots, s_n \in \mathbb{K}$, en un único objeto que denominaremos vector

Definimos el conjunto (de los vectores) $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\cdots,n\}\}$

Componentes de un vector: x_1, primera componente; x_2, segunda componente; .... ;x_n, n-ésima componente

Vector cero: $0 = (0,0,\cdots,0)$

Igualdad de vectores: $\left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{array}\right\}$ $\quad x = y \iff \forall i \in \{1,2,\cdots,n\}, x_i = y_i$

Llamaremos **vectores fila** y **vectores columna** de una matriz a cada una de sus filas y columnas

Según interese, escribiremos indistintamente los vectores vertical u horizontalmente, y los podremos considerar matrices:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x \in \mathbb{K}^n \qquad x \in \mathbf{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K}^n \qquad x \in \mathbf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$$

Definimos una ley de composición interna y otra externa, que denominaremos **suma de vectores** y **producto por un escalar**:

$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \qquad x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \qquad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$

Propiedades:

I. La suma es un grupo conmutativo

   A. $0 = (0,0,\cdots,0)$ es el elemento neutro

   B. El elemento opuesto de cada $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es $(-x) = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$

II. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{K}^n, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

III. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

IV. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$

V. $\forall x \in \mathbb{K}^n, 1 \cdot x = x$

A. $\forall x \in \mathbb{K}^n, 0 \cdot x = 0 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot 0 = 0$

B. $\forall x \in \mathbb{K}^n, -x = (-1) \cdot x$

Notas:

Llamaremos posteriormente a esta estructura algebraica espacio vectorial $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

Nótese que son precisamente estas operaciones las que hemos utilizado, con los vectores fila, en el método de Gauss

Dependencia e independencia lineal

Combinación lineal: $x \in \mathbb{K}^n$ es combinación lineal de $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{K}^n \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}, x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_k \cdot x_k$

o también: $\quad 0 = (-1) \cdot x + \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_k \cdot x_k$.

0 es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores: $\quad 0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n$

Dependencia lineal:

I. El conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset \mathbb{K}^n$ es **linealmente dependiente** o **ligado**

$\iff \qquad \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ no todos nulos que $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_k \cdot x_k = 0$

II. El conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset \mathbb{K}^n$ es **linealmente independiente** o **libre** si no es ligado

$\iff \qquad \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_k \cdot x_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Ejemplos:

Determinar si $\{(2,1),(1,1)\}$ es libre o ligado.

$$\alpha\cdot(2,1)+\beta\cdot(1,1)=(0,0) \iff (2\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)=(0,0) \iff (2\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(0,0) \iff \left\{\begin{aligned} 2\alpha+\beta&=0 \\ \alpha+\beta&=0 \end{aligned}\right\}$$ (sistema homogéneo 2x2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ (sistema compatible determinado, solución única $(0,0)$)

El conjunto es **libre**

Determinar si $\{(1,1,3),(0,1,2),(1,2,5)\}$ es libre o ligado.

$$\alpha\cdot(1,1,3)+\beta\cdot(0,1,2)+\gamma(1,2,5)=(0,0,0) \iff (\alpha+\gamma,\alpha+\beta+2\gamma,3\alpha+2\beta+5\gamma)=(0,0,0) \iff \left\{\begin{aligned} \alpha+\gamma&=0 \\ \alpha+\beta+2\gamma&=0 \\ 3\alpha+2\beta+5\gamma&=0 \end{aligned}\right\}$$ (S.H. 3x3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (S.C.I, varias soluciones)

El conjunto es **ligado**

Para determinar si un conjunto de vectores es libre o ligado, basta escribir la matriz cuyas columnas son los vectores dados y realizar operaciones elementales para encontrar una forma escalonada. El sistema es libre solamente si el número de peldaños coincide con el de columnas (el número de vectores dados), siendo ligado en caso contrario

Rango

Se denomina **rango de un conjunto de vectores** al mayor número de elllos que son linealmente independientes

Se denomina **rango de una matriz** A, $r(A)$, al rango de sus vectores columna

El rango de una matriz coincide con el número de peldaños de una de sus formas escalonadas

Los vectores correspondientes a las columnas pivote (escalones) son linealmente independientes

Teorema de Rouché-Frobenius (2.0)

Siendo:

A = matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales

$\overline{A}$ = matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales

n = número de incógnitas del sistema

Un sistema de ecuaciones lineales es:

I. compatible determinado $\iff r(A) = r(\overline{A}) = n$

II. compatible indeterminado $\iff r(A) = r(\overline{A}) < n$

III. incompatible $\iff r(A) \neq r(\overline{A}) \quad (r(A) + 1 = r(\overline{A}))$

Estructura de las soluciones

Sea el sistema (†) y su sistema homogéneo asociado (‡) $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\cdots,m\}, j \in \{1,2,\cdots,n\}$

$$(\dagger) \quad \left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$$(\ddagger) \quad \left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = 0 \end{array}\right\}$$

I. Si $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n), v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ son soluciones de (‡) $u + v$ es solución de (‡)

II. Si $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ es solución de (‡), $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot u$ es solución de (‡)

III. Si (‡) es indeterminado $\exists u_1, u_2, \cdots, u_k \in \mathbb{K}^n$ linealmente independientes de modo que cualquier solución de (‡) es:

$$sg_h = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_k \cdot u_k \text{ para algunos } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$$

Además $k = n - r(A)$

IV. Si $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n), w' = (w'_1, w'_2, \cdots, w'_n)$ son soluciones de (†), $w - w'$ es solución de (‡)

V. Si $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ es solución de (†) y $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ es solución de (‡), $w + u$ es también solución de (†)

VI. Dada $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$, solución de (†), cualquier otra solución de (†), $w' = (w'_1, w'_2, \cdots, w'_n)$, puede escribirse:

$$w' = w + sg_h = w + \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_k \cdot u_k \text{para algunos } \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$$

A la expresión $u + \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_k \cdot u_k$ se le denomina **solución general** del sistema (†), siendo u una **solución particular**

Sección 3

Operaciones con matrices

Aplicaciones lineales

Aplicación lineal asociada a la matriz $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es la aplicación $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ que

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \qquad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

o bien $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n,\ \cdots\ ,\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)$

Propiedades:

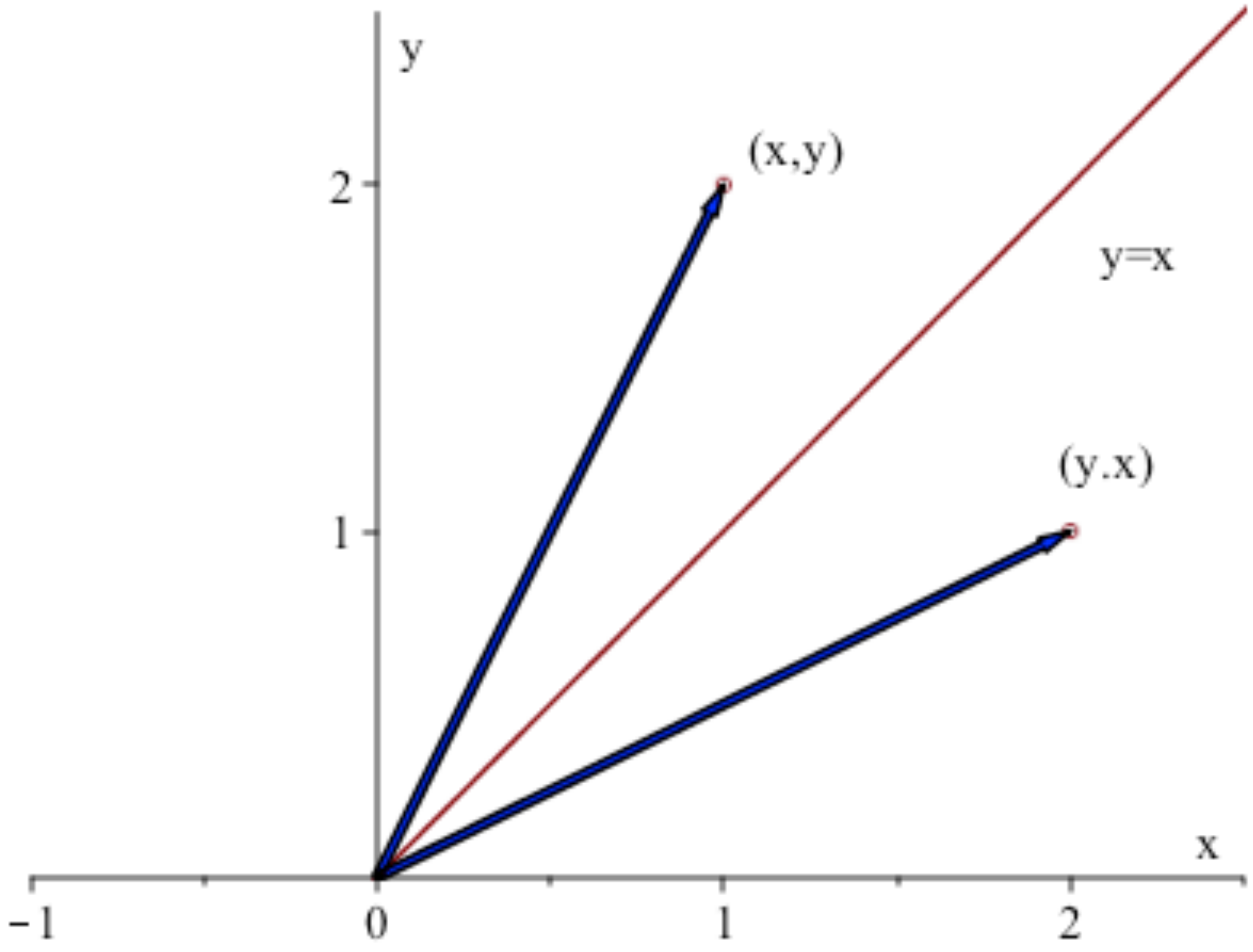
I. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, f(x + y) = f(x) + f(y)$

II. $\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Ejemplos:

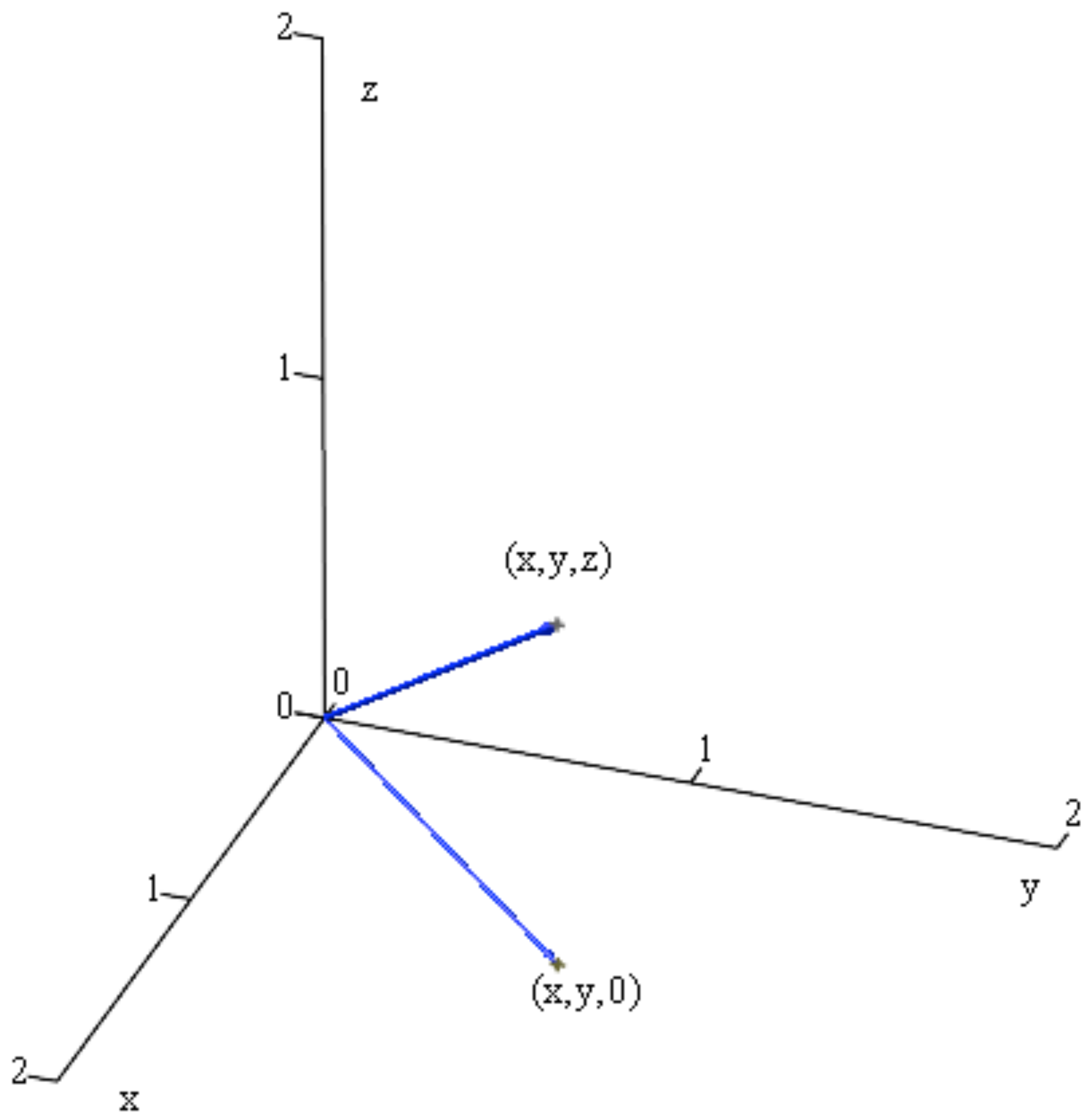
Para $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la aplicación lineal asociada es $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x, y) = (0x + 1y,\ \ 1x + 0y) = (y,\ x)$

y es el punto (vector) simétrico de cada $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ respecto de la recta $y = x$



Para $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la aplicación lineal asociada es $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = (x + 0y + 0z,\ 0x + 1y + 0z,\ 0x + 0y + 0z) = (x,\ y,\ 0)$

y es la proyección de cada punto (vector) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ sobre el plano $z = 0$



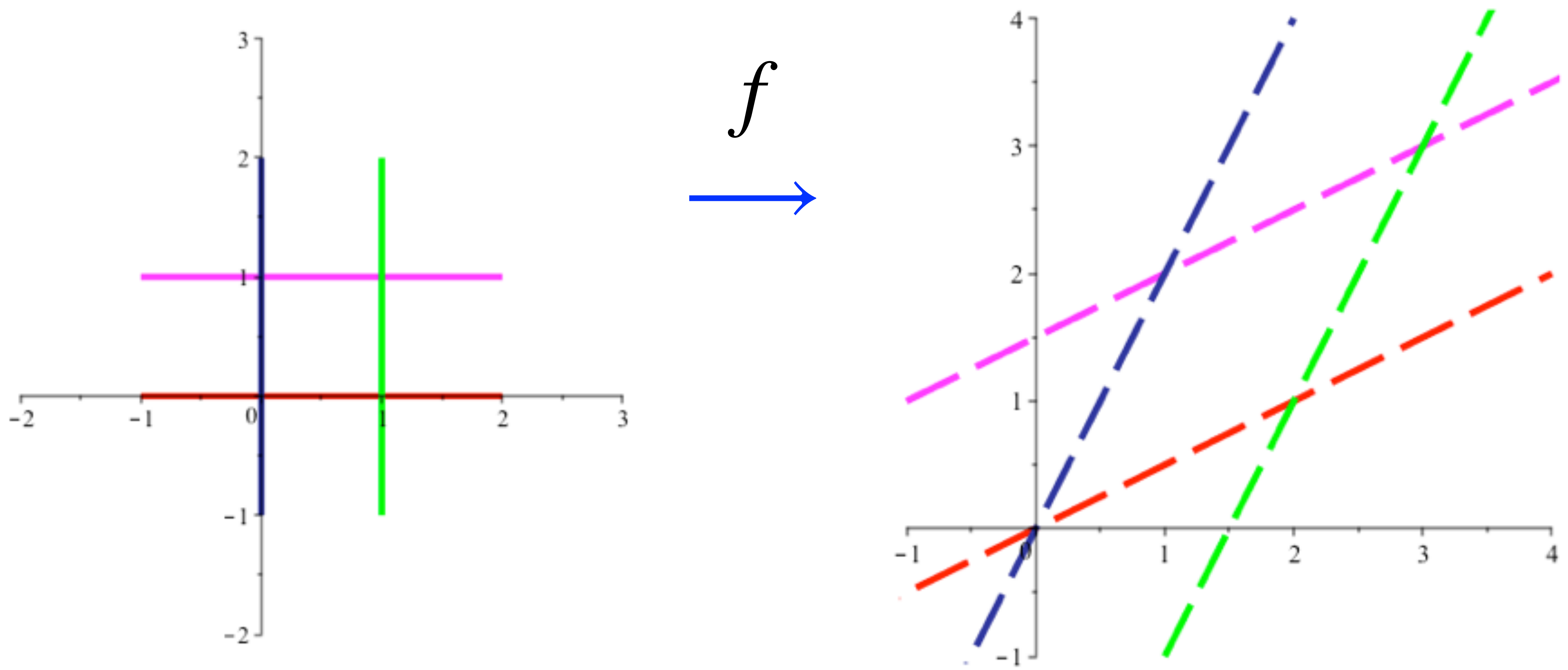
La imagen de la recta $r = r_0 + \lambda v$ (que pasa por r_0 y tiene la dirección de v), por una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (o $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) es:

$$f(r) = f(r_0 + \lambda v) = f(r_0) + \lambda f(v)$$

es decir, la recta que pasa por $f(r_0)$ y tiene la dirección de $f(v)$

Ejemplo:

Para $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, la imagen del cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ es



Teorema:

Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicación que:

I. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, f(x+y) = f(x) + f(y)$

II. $\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$\implies$ f es una aplicación lineal cuya matriz está formada por las columnas $f(1,0,0,\cdots,0), f(0,1,0,\cdots,0), f(0,0,1,\cdots,0), \cdots, f(0,0,0,\cdots,1)$

Demostración:

Como $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1,0,\cdots,0) + (0,x_2,\cdots,0) + (0,0,\cdots,x_n) = x_1(1,0,\cdots,0) + x_2(0,1,\cdots,0) + x_n(0,0,\cdots,1)$,

$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1(1,0,\cdots,0) + x_2(0,1,\cdots,0) + x_n(0,0,\cdots,1)) = x_1 f(1,0,\cdots,0) + x_2 f(0,1,\cdots,0) + x_n f(0,0,\cdots,1)$

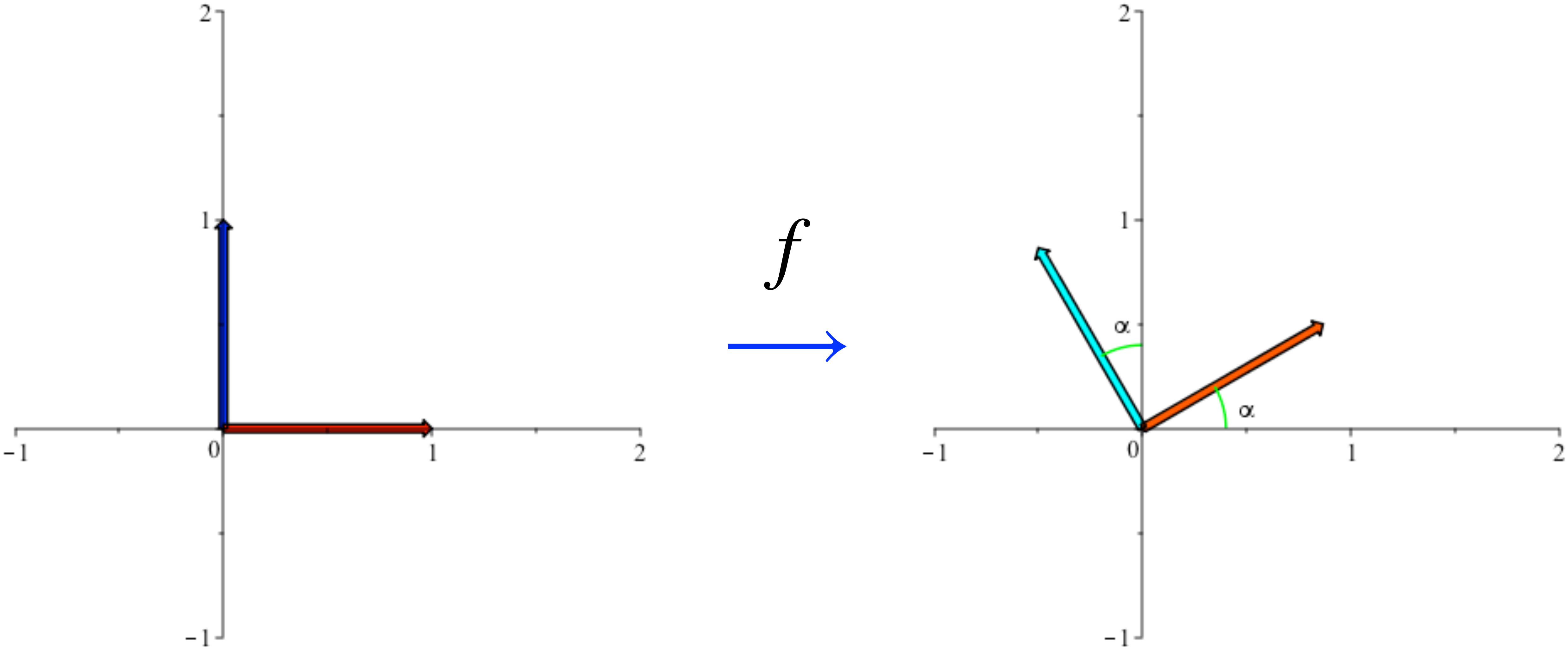
Siendo $f(1,0,\cdots,0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}), f(0,1,\cdots,0) = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}), \cdots, f(0,0,\cdots,1) = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn})$,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n,\ \cdots\ ,\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

y por tanto su matriz asociada es $$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Ejemplo:

Sabiendo que un giro de un ángulo α en $\mathbf{R}^2$ es una aplicación lineal, encontrar su matriz



$$\begin{aligned} g(1,0) &= (\cos\alpha, \sin\alpha) \\ g(0,1) &= (-\sin\alpha, \cos\alpha) \end{aligned} \implies G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Operaciones con aplicaciones lineales

Llamando $\mathbb{L}_{m\times n} = \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ al conjunto de aplicaciones lineales $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ $(f \in \mathbb{L}_{m\times n})$ podemos definir

$+ : \mathbb{L}_{m\times n} \times \mathbb{L}_{m\times n} \to \mathbb{L}_{m\times n}$ $\quad \forall f, g \in \mathbb{L}_{m\times n}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{L}_{m\times n} \to \mathbb{L}_{m\times n}$ $\quad \forall f \in \mathbb{L}_{m\times n}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Efectivamente $(f+g)$ y (αf) son aplicaciones lineales:

I. $(f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$

II. $(f+g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda(f+g)(x)$

I. $(\alpha f)(x+y) = \alpha f(x+y) = \alpha(f(x) + f(y)) = \alpha f(x) + \alpha f(y) = (\alpha f)(x) + (\alpha f)(y)$

II. $(\alpha f)(\lambda x) = \alpha f(\lambda x) = \alpha(\lambda f(x)) = (\alpha\lambda) f(x) = (\lambda\alpha) f(x) = \lambda(\alpha f(x)) = \lambda(\alpha f)(x)$

Si las matrices de f, g son respectivamente F, G $\quad F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Las columnas de las matrices de $f + g$ y de αf son

$$(f+g)(1,0,\cdots,0) = f(1,0,\cdots,0) + g(1,0,\cdots,0) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \\ a_{21} + ba_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha f)(1,0,\cdots,0) = \alpha f(1,0,\cdots,0) = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} \\ \alpha a_{21} \\ \vdots \\ \alpha a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$(f+g)(0,1,\cdots,0) = f(0,1,\cdots,0) + g(0,1,\cdots,0) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{12} \\ a_{22} + ba_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} + b_{m2} \end{pmatrix} \qquad (\alpha f)(0,1,\cdots,0) = \alpha f(0,1,\cdots,0) = \alpha \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{12} \\ \alpha a_{22} \\ \vdots \\ \alpha a_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$(f+g)(0,0,\cdots,1) = f(0,0,\cdots,1) + g(0,0,\cdots,1) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} + b_{1n} \\ a_{2n} + ba_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (\alpha f)(0,0,\cdots,1) = \alpha f(0,0,\cdots,1) = \alpha \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz de $f + g$ es $\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$ y la de αf es $\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$

Operaciones con matrices

En $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ podemos definir

$$+ : \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \qquad \forall F, G \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), F + G = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \qquad \forall F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha F = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

siendo $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma y el producto externo de aplicaciones lineales (y de matrices)

I. La suma es un grupo conmutativo

A. $\begin{cases} 0 \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \in \mathbb{L}_{m\times n}, \forall x \in \mathbb{K}^n, 0(x) = (0,0,\cdots,0) \end{cases}$ es el elemento neutro de $\begin{cases} \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{L}_{m\times n} \end{cases}$

B. El elemento opuesto de cada $\begin{cases} F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \end{cases}$ es $\begin{cases} -F = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \\ -f \in \mathbb{L}_{m\times n}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (-f)(x) = -f(x) \end{cases}$

II. $\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall F, G \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \alpha \cdot (F+G) = \alpha \cdot F + \alpha \cdot G \\ \forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall f, g \in \mathbb{L}_{m\times n},\ \alpha \cdot (f+g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g \end{cases}$

III. $\begin{cases} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ (\alpha+\beta) \cdot F = \alpha \cdot F + \beta \cdot F \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathbb{L}_{m\times n},\ (\alpha+\beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f \end{cases}$

IV. $\begin{cases} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ (\alpha\beta) \cdot F = \alpha(\beta \cdot F) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathbb{L}_{m\times n},\ (\alpha\beta) \cdot f = \alpha(\beta \cdot f) \end{cases}$

V. $\begin{cases} \forall F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ 1 \cdot F = F \\ \forall f \in \mathbb{L}_{m\times n},\ 1 \cdot f = f \end{cases}$

Y además: $\begin{cases} \forall F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ 0 \cdot F = 0 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot 0 = 0 \\ \forall f \in \mathbb{L}_{m\times n},\ 0 \cdot f = 0 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot 0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \forall F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ -F = (-1) \cdot F \\ \forall f \in \mathbb{L}_{m\times n},\ -f = (-1) \cdot f \end{cases}$

Composición de aplicaciones lineales

Sean $f \in \mathbb{L}_{m\times n}, g \in \mathbb{L}_{p\times m}$ de matrices $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$

La composición de aplicaciones lineales $g \circ f \in \mathbb{L}_{p\times n}$ es una aplicación lineal:

I. $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$, $(g \circ f)(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$

II. $\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ $(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x)$

La columna $j \in \{1,2,\cdots,n\}$ de su matriz es:

$$(g \circ f)(0,0,\cdots,1,\cdots,0) = g(f(0,0,\cdots,1,\cdots,0)) = g(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}) = \begin{pmatrix} b_{11}a_{1j} + b_{12}a_{2j} + \cdots + b_{1m}a_{mj} \\ b_{21}a_{1j} + b_{22}a_{2j} + \cdots + b_{2m}a_{mj} \\ \vdots \\ b_{p1}a_{1j} + b_{p2}a_{2j} + \cdots + b_{pm}a_{mj} \end{pmatrix}$$

y la matriz de $g \circ f$ es $\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1m}a_{m2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1m}a_{mn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2m}a_{m1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2m}a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}a_{11} + b_{p2}a_{21} + \cdots + b_{pm}a_{m1} & b_{p1}a_{12} + b_{p2}a_{22} + \cdots + b_{pm}a_{m2} & \cdots & b_{p1}a_{1n} + b_{p2}a_{2n} + \cdots + b_{pm}a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$

Producto de matrices

Siendo las matrices $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, y $G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$ se define el producto de ambas

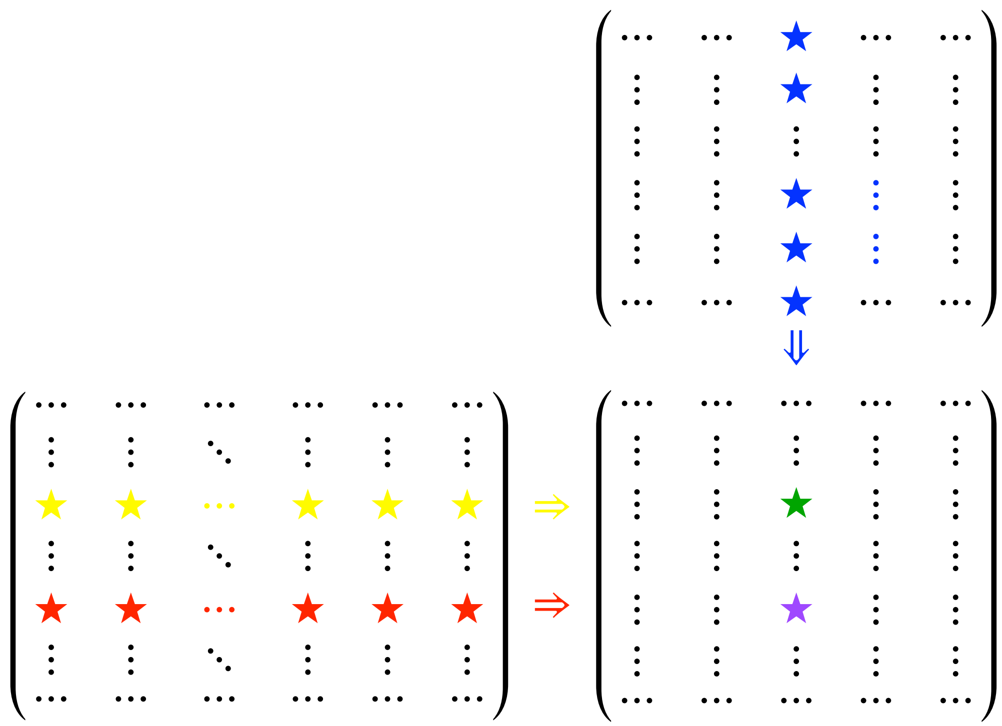
$$G \cdot F = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1m}a_{m2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1m}a_{mn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2m}a_{m1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2m}a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}a_{11} + b_{p2}a_{21} + \cdots + b_{pm}a_{m1} & b_{p1}a_{12} + b_{p2}a_{22} + \cdots + b_{pm}a_{m2} & \cdots & b_{p1}a_{1n} + b_{p2}a_{2n} + \cdots + b_{pm}a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p\times n}$$

de modo que el elemento situado en la fila $i \in \{1,2,\cdots,p\}$, columna $j \in \{1,2,\cdots,n\}$ del resultado $C = G \cdot F$ es

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$$

De este modo, la matriz de la aplicación lineal $g \circ f$ es la matriz $G \cdot F$ (siendo G, F las matrices de g, f, resp.)

$$G \cdot F = \begin{array}{c c} & \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \star & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \star & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i$$



Propiedades:

En el producto de matrices, al igual que en la composición de funciones, el orden está determinado, y cuando es posible cambiarlo, ni el producto ni la composición son conmutativos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

El producto de matrices no es cancelativo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

I. $\begin{cases} (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \\ (H \cdot G) \cdot F = H \cdot (G \cdot F) \end{cases}$

II. $\begin{cases} h \circ (g + f) = h \circ g + h \circ f \\ H \cdot (G + F) = H \cdot G + H \cdot F \end{cases}$

III. $\begin{cases} (h + g) \circ f = h \circ f + g \circ f \\ (H + G) \cdot F = H \cdot F + G \cdot F \end{cases}$

IV. $\begin{cases} (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f) \\ (\alpha G) \cdot F = G \cdot (\alpha F) = \alpha(G \cdot F) \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones, matrices y aplicaciones lineales

Sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Aplicación lineal:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

El sistema puede escribirse:

$$f(x) = b \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

$$F\cdot x = b \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

¿Cómo es el sistema según f sea inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?

Solución/soluciones del sistema: $f^{-1}(\{b\})$

Sección 4

Inversa de una matriz

Inversa de una aplicación lineal

La aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ admite inversa $\iff \exists f^{-1} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n, f^{-1} \circ f = i_{\mathbb{K}^n} \wedge f \circ f^{-1} = i_{\mathbb{K}^m}$

Veremos más adelante que solamente admitirán inversa (algunas) aplicaciones lineales cuando $n = m$

La aplicación inversa f^{-1} es lineal†:

I. $f(f^{-1}(x+y)) = x+y = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \implies f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$

II. $f(f^{-1}(\alpha x)) = \alpha x = \alpha f(f^{-1}(x)) = f(\alpha f^{-1}(x)) \implies f^{-1}(\alpha x) = \alpha f^{-1}(x)$

Si $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$‡ es la matriz (cuadrada) de f (invertible), a la matriz de f^{-1} la denominaremos matriz inversa $F^{-1} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y:

$$F \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot F = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(matriz de } i_{\mathbb{K}^n}\text{)}$$

y diremos que la matriz F es invertible, **regular** o **no singular**

† Recuérdese que las únicas aplicaciones que admiten inversa son las biyectivas, y que la inversa cuando existe es única

‡ Conjunto a veces denominado $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

Cálculo de la inversa de una matriz

Sea la matriz $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, su inversa $F^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ verificará:

$$F \cdot F^{-1} = I_n \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ es decir}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos n sistemas de ecuaciones, cada uno de n ecuaciones y n incógnitas†, teniendo todos ellos la misma matriz del sistema.

Si todos ellos son compatibles y determinados, tendremos una (única) matriz inversa:

$$F \text{ es invertible} \iff r(F) = n$$

† Las n incógnitas de cada sistema los elementos de una de las columnas de F^{-1}

Para resolverlos, podemos hacer la misma secuencia de operaciones elementales en cada uno de ellos

y resolverlos simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \cdots \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Inversa de la matriz de un sistema de ecuaciones

Dado el sistema dado por $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$: $\qquad F \cdot x = b \qquad$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Si la matriz F admite inversa (y tiene por tanto rango n) se verifica:

$F^{-1} \cdot (F \cdot x) = F^{-1} \cdot b \qquad (F^{-1} \cdot F) \cdot x = F^{-1} \cdot b \qquad I_{n \times n} \cdot x = F^{-1} \cdot b$

es decir $\quad \mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{b}$

Ejemplo:

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Llamemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

Se verificará:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

y los resolvemos simultáneamente:

$$\begin{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \end{matrix} \to \begin{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{matrix} \to \begin{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{matrix} \to \begin{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{matrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_3 = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -1/2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \end{array} \right. \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

O De manera más rápida y práctica:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ampliación de conceptos de matrices

Matriz cuadrada: $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

Diagonal principal de $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$: $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$

Matriz diagonal $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$: $\forall i, j \in \{1,2,\cdots,n\}, i \neq j \implies a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} \bigstar & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bigstar & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bigstar \end{pmatrix}$$

Matriz identidad $I_n \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$: matriz diagonal que además $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}, a_{ii} = 1$

Matriz triangular inferior $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}, \forall j \in \{1,2,\cdots,n\}, i < j \implies a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} \bigstar & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bigstar & 0 & \cdots & 0 \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & \cdots & \bigstar \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}, \forall j \in \{1,2,\cdots,n\}, i > j \implies a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \bigstar \\ 0 & 0 & \cdots & \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bigstar \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular unitaria $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: matriz triangular que además $\forall i \in \{1,2,\cdots,\min(m,n)\}, a_{ii} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bigstar & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bigstar & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & 1 \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & \cdots & \bigstar \\ \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \bigstar & \cdots & \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & 1 & \cdots & \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \bigstar \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & 1 & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Potencias de matrices $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})^{\dagger}$:

$$F^2 = F\cdot F \qquad F^3 = F^2\cdot F = F\cdot F\cdot F \qquad F^k = F^{k-1}\cdot F = \overset{\longleftarrow\; k \;\longrightarrow}{F\cdot F\cdot \cdots \cdot F} \qquad (k\in\mathbf{N})$$

$$F^{-2} = F^{-1}\cdot F^{-1} \qquad F^{-k} = F^{-(k-1)}\cdot F^{-1} = \overset{\longleftarrow\; k \;\longrightarrow}{F^{-1}\cdot F^{-1}\cdot \cdots \cdot F^{-1}} \qquad (k\in\mathbf{N})$$

[†]Potencias negativas solo si F es invertible

$$F^0 = I_n \qquad \forall k,l\in\mathbf{Z},\ F^{k+l} = F^k\cdot F^l$$

Matriz transpuesta de $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$F^T \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \qquad \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}, \forall j\in\{1,2,\cdots,m\}, b_{ij} = a_{ji}$$

$$F = \begin{pmatrix} \star & \odot & \cdots & \oplus & \otimes \\ \star & \odot & \cdots & \oplus & \otimes \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \odot & \cdots & \oplus & \otimes \end{pmatrix} \implies F^T = \begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ \odot & \odot & \cdots & \odot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \oplus & \oplus & \cdots & \oplus \\ \otimes & \otimes & \cdots & \otimes \end{pmatrix}$$

Matriz transpuesta hermitiana de $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$:

$$F^H \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbf{C}) \qquad \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}, \forall j\in\{1,2,\cdots,m\}, b_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Propiedades:

I.	$(F^T)^T = F$	$(F^H)^H = F$
II.	$(F+G)^T = F^T + G^T$	$(F+G)^H = F^H + G^H$
III.	$(\alpha F)^T = \alpha F^T$	$(\alpha F)^H = \overline{\alpha} F^H$
IV.	$(F\cdot G)^T = G^T\cdot F^T$	$(F\cdot G)^H = G^H\cdot F^H$

$F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es una **matriz simétrica** $\iff F = F^T$

$F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es una **matriz antisimétrica** $\iff F = -F^T$

$F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ es una **matriz hermítica (o hermitiana)** $\iff F = F^H$

$F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es una **matriz idempotente** $\iff F^2 = F$

$F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es una **matriz involutiva** $\iff F^2 = I$ $\quad$ ($\iff F = F^{-1}$)

Propiedades:

I. $F \in \mathbf{M}_{m\times m}(\mathbb{K}), G \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$ F simétrica $\implies G^T \cdot F \cdot G \in \mathbf{M}_{n\times n}$ es simétrica

II. $F \in \mathbf{M}_{m\times m}(\mathbf{C}), G \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{C}),$ F hermítica $\implies G^H \cdot F \cdot G \in \mathbf{M}_{n\times n}$ es hermítica

III. $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ $\implies F^T \cdot F \in \mathbf{M}_{n\times n}$ y $F \cdot F^T \in \mathbf{M}_{m\times m}$ son simétricas

IV. $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $\implies F + F^T \in \mathbf{M}_{n\times n}$ es simétrica

V. $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $\implies F - F^T \in \mathbf{M}_{n\times n}$ es antisimétrica

VI. $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $\implies F = \frac{1}{2}(F + F^T) + \frac{1}{2}(F - F^T) \in \mathbf{M}_{n\times n}$

VII. $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertible $\implies F^T$ invertible y $(F^T)^{-1} = (F^{-1})^T$

VIII. $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ invertible $\implies F^H$ invertible y $(F^H)^{-1} = (F^{-1})^H$

Matriz particionada por filas: $$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{F1} \\ f_{F2} \\ \vdots \\ f_{Fm} \end{pmatrix}$$ con $f_{Fi} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$

Matriz particionada por columnas: $$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (c_{F1} \quad c_{F2} \quad \cdots \quad c_{Fn})$$ con $c_{Fi} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

Producto de matrices mediante matrices particionadas: $G \in \mathbf{M}_{p\times m}(\mathbb{K}), F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), G \cdot F \in \mathbf{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$

$$G \cdot F = (c_{G1} \quad c_{G2} \quad \cdots \quad c_{Gm}) \cdot \begin{pmatrix} f_{F1} \\ f_{F2} \\ \vdots \\ f_{Fm} \end{pmatrix} = c_{G1} \cdot f_{F1} + c_{G2} \cdot f_{F2} + \cdots + c_{Gm} \cdot f_{Fm}$$

$$c_{Gi} \cdot f_{Fi} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{pmatrix} \cdot (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) = \begin{pmatrix} b_{1i}a_{i1} & b_{1i}a_{i2} & \cdots & b_{1i}a_{in} \\ b_{2i}a_{i1} & b_{2i}a_{i2} & \cdots & b_{2i}a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{pi}a_{i1} & b_{pi}a_{i2} & \cdots & b_{pi}a_{in} \end{pmatrix}$$

$$G \cdot F = \begin{pmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ \vdots \\ f_{Gp} \end{pmatrix} \cdot (c_{F1} \quad c_{F2} \quad \cdots \quad c_{Fn}) = \begin{pmatrix} f_{G1} \cdot c_{F1} & f_{G1} \cdot c_{F2} & \cdots & f_{G1} \cdot c_{Fn} \\ f_{G2} \cdot c_{F1} & f_{G2} \cdot c_{F2} & \cdots & f_{G2} \cdot c_{Fn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{Gp} \cdot c_{F1} & f_{Gp} \cdot c_{F2} & \cdots & f_{Gp} \cdot c_{Fn} \end{pmatrix}$$

$$f_{Gi} \cdot c_{Fj} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{1m} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} \right)$$

Producto por matriz columna: $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), X \in \mathbf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), F \cdot X \in \mathbf{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$

$$F \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{F1} & c_{F2} & \cdots & c_{Fn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 c_{F1} + x_2 c_{F2} + \cdots + x_n c_{Fn}$$

Es una matriz columna combinación lineal de las columnas de F

$$\begin{pmatrix} {\color{red}\star} & {\color{red}\odot} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}\oplus} & {\color{red}\otimes} \\ {\color{blue}\star} & {\color{blue}\odot} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}\oplus} & {\color{blue}\otimes} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {\color{green}\star} & {\color{green}\odot} & {\color{green}\cdots} & {\color{green}\oplus} & {\color{green}\otimes} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} {\color{red}\star} \\ {\color{blue}\star} \\ \vdots \\ {\color{green}\star} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} {\color{red}\odot} \\ {\color{blue}\odot} \\ \vdots \\ {\color{green}\odot} \end{pmatrix} + \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} {\color{red}\oplus} \\ {\color{blue}\oplus} \\ \vdots \\ {\color{green}\oplus} \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} {\color{red}\otimes} \\ {\color{blue}\otimes} \\ \vdots \\ {\color{green}\otimes} \end{pmatrix}$$

Producto por matriz fila: $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), Y \in \mathbf{M}_{1\times m}(\mathbb{K}), Y \cdot F \in \mathbf{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$

$$Y \cdot F = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{F1} \\ f_{F2} \\ \vdots \\ f_{Fm} \end{pmatrix} = y_1 f_{F1} + y_2 f_{F2} + \cdots + y_m f_{Fm}$$

Es una matriz fila combinación lineal de las filas de F

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {\color{red}\star} & {\color{red}\odot} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}\oplus} & {\color{red}\otimes} \\ {\color{blue}\star} & {\color{blue}\odot} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}\oplus} & {\color{blue}\otimes} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {\color{green}\star} & {\color{green}\odot} & {\color{green}\cdots} & {\color{green}\oplus} & {\color{green}\otimes} \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} {\color{red}\star} & {\color{red}\odot} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}\oplus} & {\color{red}\otimes} \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} {\color{blue}\star} & {\color{blue}\odot} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}\oplus} & {\color{blue}\otimes} \end{pmatrix} + \cdots + y_m \begin{pmatrix} {\color{green}\star} & {\color{green}\odot} & {\color{green}\cdots} & {\color{green}\oplus} & {\color{green}\otimes} \end{pmatrix}$$

Matriz columna unidad:

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(columna j de la matriz identidad I_n)

Matriz fila unidad:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & j & & & \\ & & & & \downarrow & & & \\ e_j^T = & (0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0) \end{array}$$

(fila j de la matriz identidad I_n)

Propiedades:

$$e_i \cdot e_j^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i$$

$$e_j^T \cdot e_i = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} (0) & i \neq j \\ (1) & i = j \end{cases}$$

$$e_j^T \cdot F = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn})$$

$$e_i \cdot (e_j^T \cdot F) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Matrices elementales:

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

(intercambio de filas $i < j$ de la matriz identidad I_n)

$$E_i(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & i & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

(multiplicación de la fila i de la matriz identidad I_n por $\alpha \neq 0$)

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(adición a la fila i de la matriz identidad I_n su fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$)

Propiedades:

I. Las matrices elementales son invertibles: $E_{ij}^{-1} = E_{ji} = E_{ij}$ $\quad E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$ $\quad E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$

II. Al intercambiar las filas i, j de $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ obtenemos: $E_{ij} \cdot F$

III. Al multiplicar la fila i de $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ por $\alpha \neq 0$ obtenemos: $E_i(\alpha) \cdot F$

IV. Al añadir a la fila i de $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$ obtenemos: $E_{ij}(\alpha) \cdot F$

V. Una secuencia de operaciones elementales de fila realizadas sobre $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es:

$$S \cdot F = E_n \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot F$$

$S = E_n \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \in \mathbf{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ es invertible y $S^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_n^{-1}$

Espacios vectoriales

- **Espacio vectorial. Ejemplos**
- **Dependencia e independencia lineal**
- **Bases y dimensión**
- **Subespacios vectoriales. Operaciones entre ellos**

Sección 1

Espacio vectorial. Ejemplos

Sean un conjunto $\mathscr{V}$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, a cuyos elementos denominaremos **vectores** y **escalares** respectivamente

Definamos una operación interna + y una externa · :

$$\begin{array}{rcc} + : \mathscr{V} \times \mathscr{V} & \rightarrow & \mathscr{V} \\ (u, v) & \rightarrow & w = u + v \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} \cdot : \mathbb{K} \times \mathscr{V} & \rightarrow & \mathscr{V} \\ (\alpha, v) & \rightarrow & w = \alpha v \end{array}$$

Diremos que $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$**-espacio vectorial** o espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ si se verifican:

I. $\forall u, v \in \mathscr{V}, u + v = v + u$

II. $\forall u, v, w \in \mathscr{V}, (u + v) + w = u + (v + w)$

III. $\exists 0 \in \mathscr{V}, \forall u \in \mathscr{V}, u + 0 = 0 + u = u$

IV. $\forall u \in \mathscr{V}, \exists (-u) \in \mathscr{V}, u + (-u) = (-u) + u = 0$

V. $\forall u \in \mathscr{V}, 1u = u$

VI. $\forall u \in \mathscr{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

VII. $\forall u \in \mathscr{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

VIII. $\forall u, v \in \mathscr{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

Nótese que las cuatro primeras indican que $(\mathscr{V}, +)$ es grupo conmutativo

Espacio vectorial real: cuando $\mathbb{K} = \mathbf{R}$

Espacio vectorial complejo: cuando $\mathbb{K} = \mathbf{C}$

Propiedades:

I. $\forall u \in \mathscr{V},\ \ 0u = 0$

$$u = 1u = (0+1)u = 0u + 1u = 0u + u \implies 0u = 0$$

II. $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \ \alpha 0 = 0$

$$a0 = a(0+0) = a0 + a0 \implies a0 = 0$$

III. $\forall u \in \mathscr{V},\ \ (-u) = (-1)u$

$$u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = 0 \implies (-u) = (-1)u$$

Ejemplos:

$(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$	vectores reales en el plano
$(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$	vectores reales en el espacio
$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$	vectores n-tuplas de elementos de $\mathbb{K}$
$(\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$	matrices de m filas y n columnas de elementos de $\mathbb{K}$
$\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$,	aplicaciones lineales $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Ejemplos:

$\{0\}$ con las operaciones $0+0=0$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha 0 = 0$

$\mathbb{K}^\infty = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \,|\, a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbf{N}\}$ (sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$) con las operaciones:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) + (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n, \cdots)$$

$$\alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n, \cdots)$$

$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \,|\, a_j \in \mathbb{K}, j \in \{0,1,2,\cdots,n\}, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ (polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{K}$), con:

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^m) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_nx^n \qquad \text{(si } m \le n\text{)}$$

$$\alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n$$

$\mathbb{K}_m[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \,|\, a_j \in \mathbb{K}, j \in \{0,1,2,\cdots,n\}, n \le m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ (polinomios de $\mathbb{K}[x]$ de grado como mucho m)

con las mismas operaciones que $\mathbb{K}(x)$

$C([a,b], \mathbf{R})$ funciones reales continuas definidas en $[a,b]$ con:

$$\forall x \in [a,b], \;\; (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in [a,b], \;\; (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

El conjunto $S \subset \mathbb{K}^n$ de soluciones de un sistema homogéneo $\left\{ \begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array} \right\}$ con las ops. de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

Si A es la matriz del sistema: $x \in S \iff A \cdot x = 0$

Las dos operaciones son leyes de composición en S

$$x, y \in S, \;\; A \cdot (x + y) = 0 \implies x + y \in S$$

$$x \in S, \alpha \in \mathbb{K} \;\; A \cdot (\alpha x) = 0 \implies \alpha x \in S$$

Las propiedades de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ las tiene $(S, +, \cdot)$ ya que

$$A \cdot 0 = 0 \implies 0 \in S$$

$$A \cdot (-x) = -A \cdot x = 0 \implies (-x) \in S$$

Sección 2

Dependencia e indepencia lineal

Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

Combinación lineal: $v \in \mathscr{V}$ es combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_k \in \mathscr{V} \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$

o también: $0 = (-1)v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$.

0 es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores: $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$

Dependencia lineal:

I. El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset \mathscr{V}$ es **linealmente dependiente** o **ligado**

$\iff$ $\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ no todos nulos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$

II. El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset \mathscr{V}$ es **linealmente independiente** o **libre** si no es ligado

$$\iff \qquad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Sistema de generadores:

El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset \mathscr{V}$ es **un sistema de generadores de** $\mathscr{V}$

$$\iff \qquad \forall v \in \mathscr{V}, \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Propiedades:

I. Si el conjunto $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset \mathscr{V}$ es ligado, al menos uno de sus elementos es combinación lineal de los demás

$$\exists \alpha_j \neq 0, \ \ j \in \{1,\cdots,k\}, \ \ \alpha_j \neq 0 \wedge \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

$$\implies v_j = -\alpha_1 \alpha_j^{-1} v_1 - \cdots - \alpha_{j-1} \alpha_j^{-1} v_{j-1} - \alpha_{j+1} \alpha_j^{-1} v_{j+1} - \cdots - \alpha_k \alpha_j^{-1} v_k$$

II. Cualquier conjunto finito $V \subset \mathscr{V}$ que $0 \in V$ es ligado

$$V = \{0, v_1, \cdots, v_k\} \implies \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha 0 + 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_k = 0$$

III. Si el conjunto finito $V \subset \mathscr{V}$ es libre, $W \subset V \implies W$ es libre $\qquad (W = \{v_1, v_2, \cdots, v_l\} \subset V = \{v_1, v_2, \cdots, v_l, \cdots, v_k\})$

Si W fuese ligado, V lo sería también: $\quad \exists \alpha_j \neq 0, j \in \{1,\cdots,l\} \ \ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_l v_l + 0 v_{l+1} + \cdots + 0 v_k = 0$

IV. Si el conjunto finito $V \subset \mathscr{V}$ es ligado, $V \subset W \implies W$ es ligado

V. $V = \{v\}$ es libre $\iff v \neq 0$

$$v \neq 0 \wedge \alpha v = 0 \implies \alpha = 0$$

$$v = 0 \wedge 1v = 0$$

Ejemplos:

En $\mathbb{K}^n$ cualquier conjunto de más de n vectores es ligado

Sea $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$, con $v_i = (v_{1i}, v_{2i}, \cdots, v_{ni}), i \in \{1,2,\cdots, n+1\}$

La expresión $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$ es equivalente a un sistema homogéneo cuya matriz del sistema tiene como columnas los vectores de V:

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n+1} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n\times n+1}(\mathbb{K})$$

y su rango verificará $R(A) \leq n < n+1 \quad \Longrightarrow$ El sistema homogéneo asociado a A es compatible indeterminado y V es ligado

En $\mathbb{K}^n$ cualquier conjunto libre con n vectores es un sistema de generadores de $\mathbb{K}^n$

Sea $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ libre, $\forall v \in \mathbb{K}^n$ el conjunto $\{v, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es ligado y

$$0 = \alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \implies \alpha \neq 0^{\dagger} \wedge v = \alpha'_1 v_1 + \cdots + \alpha'_n v_n$$

† Si fuese $\alpha = 0 \implies \exists \alpha_j \neq 0, j \in \{1,\cdots,n\} \wedge 0v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ y V sería ligado

Los polinomios $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} \subset \mathbb{K}(x)$ forman un conjunto libre

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0^\dagger \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

† El segundo miembro de la igualdad representa al polinomio $0 \in \mathbb{K}(x)$

Las funciones $\{1, x, x^2\} \subset C([-1,1], \mathbf{R})$ forman un conjunto libre

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0^\ddagger \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

‡ El segundo miembro de la igualdad representa la función $0 \in C([-1,1], \mathbf{R})$ que $\forall x \in [-1,1], \quad 0(x) = 0$. No confundir esta igualdad con la ecuación $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ que puede verificarse para un máximo de dos valores de $x \in [-1,1]$

Las funciones $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\} \subset C([-\pi, \pi], \mathbf{R})$ forman un conjunto ligado

$$(-1)1 + 1\sin^2 x + 1\cos^2 x = 0$$

Dependencia lineal en conjuntos numerables:

I. El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k \cdots\} \subset \mathscr{V}$ es **linealmente dependiente** o **ligado**

$\iff$ Algún subconjunto finito $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es ligado

II. El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k \cdots\} \subset \mathscr{V}$ es **linealmente independiente** o **libre**

$\iff$ Todo subconjunto finito $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es libre

Ejemplos:

$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx, \cdots\} \subset C([-\pi, \pi], \mathbf{R})$ es libre

$\{1, \mathrm{e}^{\jmath x}, \mathrm{e}^{-\jmath x}, \cdots, \mathrm{e}^{\jmath n x}, \mathrm{e}^{-\jmath n x} \cdots\} \subset C([-\pi, \pi], \mathbf{C})$ es libre

$\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\} \subset \mathbb{K}[x]$ es libre

Sección 3

Bases y dimensión

El conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathscr{V}$ es **una base** del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$

$$\iff \begin{cases} B \text{ es libre} \\ B \text{ es sistema de generadores de } \mathscr{V} \end{cases}$$

Si $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathscr{V}$ y $\forall v \in \mathscr{V}, \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$

Se denominan **componentes** o **coordenadas** de v respecto de la base B a los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

Son únicas

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \wedge v = \alpha_1' v_1 + \alpha_2' v_2 + \cdots + \alpha_n' v_n \implies 0 = (\alpha_1 - \alpha_1')v_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')v_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')v_n \implies \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \alpha_i = \alpha_i'$$

Escribiremos las coordenadas de $v \in \mathscr{V}$ respecto de la base $B^\dagger$ con la tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$

Dada una base B podemos definir la función (biyectiva) de coordenadas: $c_B : \mathscr{V} \to \mathbb{K}^n$ que $\forall v \in \mathscr{V}, \; c_B(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

† Para escribir las coordenadas del vector respecto de una base ha de consignarse un orden para los elementos de esta

Ejemplos:

$B_c = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, con $e_j = \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ (0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0) \end{array}$, es una base de $\mathbb{K}^n$

$B_c = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ es una base de $\mathbb{K}_n[x]$

$B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Las coordenadas del polinomio $1 + x + 3x^2 \in (\mathbf{Z}_5)_9[x]$ respecto de la base B_c son el vector $(1,1,3,0,0,0,0,0,0,0) \in \mathbf{Z}_5^{10}$

Las coordenadas del vector $(1,2,3) \in \mathbf{R}^3$ respecto de la base B_c son él mismo

Las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ respecto de la base B_c son el vector $(1,3,2,4) \in \mathbf{R}^4$

Proposición:

Si el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ tiene una base B con n elementos, cualesquiera $n+1$ vectores de $\mathscr{V}$ son ligados

Sea la base $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y los $n+1$ vectores cualesquiera de $\mathscr{V}$ $w_1, w_2, \cdots, w_n, w_{n+1}$

Por ser B base de $\mathscr{V}$ $\left\{\begin{array}{ccc} w_1 & = & \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{n1}v_n \\ w_2 & = & \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{n2}v_n \\ & & \vdots \\ w_n & = & \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \cdots + \alpha_{nn}v_n \\ w_{n+1} & = & \alpha_{1\,n+1}v_1 + \alpha_{2\,n+1}v_2 + \cdots + \alpha_{n\,n+1}v_n \end{array}\right.$ Para que sean ligados $\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \cdots + \gamma_n w_n + \gamma_{n+1} w_{n+1} = 0$

Es decir:

$$\gamma_1(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{n1}v_n) + \gamma_2(\alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{n2}v_n) + \cdots + \gamma_n(\alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \cdots + \alpha_{nn}v_n) + \gamma_{n+1}(\alpha_{1\,n+1}v_1 + \alpha_{2\,n+1}v_2 + \cdots + \alpha_{n\,n+1}v_n) = 0$$

$$(\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{12} + \cdots + \gamma_n\alpha_{1n} + \gamma_{n+1}\alpha_{1\,n+1})v_1 + (\gamma_1\alpha_{21} + \gamma_2\alpha_{22} + \cdots + \gamma_n\alpha_{2n} + \gamma_{n+1}\alpha_{2\,n+1})v_2 + \cdots + (\gamma_1\alpha_{n1} + \gamma_2\alpha_{n2} + \cdots + \gamma_n\alpha_{nn} + \gamma_{n+1}\alpha_{n\,n+1})v_n = 0$$

Por ser B base (y por tanto libre):

$\left\{\begin{array}{l} \gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{12} + \cdots + \gamma_n\alpha_{1n} + \gamma_{n+1}\alpha_{1\,n+1} = 0 \\ \gamma_1\alpha_{21} + \gamma_2\alpha_{22} + \cdots + \gamma_n\alpha_{2n} + \gamma_{n+1}\alpha_{2\,n+1} = 0 \\ \vdots \\ \gamma_1\alpha_{n1} + \gamma_2\alpha_{n2} + \cdots + \gamma_n\alpha_{nn} + \gamma_{n+1}\alpha_{n\,n+1} = 0 \end{array}\right.$ Sistema homogéneo con n ecuaciones y $n+1$ incógnitas $\gamma_i, \; i \in \{1,2,\cdots,n+1\}$

Como rango $\leq n < n+1$ el sistema es compatible indeterminado y los vectores $w_1, w_2, \cdots, w_n, w_{n+1}$ son ligados

Corolarios:

Si el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ tiene una base B con n elementos, cualesquiera $m \; (m > n)$ vectores de $\mathscr{V}$ son ligados

Si el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ tiene una base B con n elementos, cualquier conjunto libre de vectores tiene como mucho n vectores

Teorema:

Todas las bases de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ poseen el mismo número de elementos

Sean las bases $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_m\}$

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ base } \wedge B' \text{ libre} \implies m \leq n \\ B' \text{ base } \wedge B \text{ libre} \implies n \leq m \end{array}\right\} \implies m = n$$

Llamamos **dimensión** del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ al número de vectores de una cualquiera de sus bases - $\dim(\mathscr{V})$

Ejemplos:

$\dim(\{0\}) = 0$

$\dim(\mathbb{K}^n) = n$

$\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$

$\dim(\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = m\, n$

Decimos que un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ es de **dimensión infinita** si se puede encontrar un $S \subset \mathscr{V}$ no finito y libre

Ejemplos:

$C([-\pi, \pi], \mathbf{R})$ $\qquad$ $C([-\pi, \pi], \mathbf{C})$ $\qquad$ $\mathbb{K}[x]$

Proposición:

En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ de dimensión n, todo conjunto libre que tenga n vectores es una base de $\mathscr{V}$

Sea el conjunto libre $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $\forall v \in \mathscr{V}$ el conjunto $\{v, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ tiene $n+1$ vectores y por tanto es ligado

$\exists \alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ \alpha v + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ y $\alpha \neq 0$ (si fuese $\alpha = 0$ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ no podría ser libre)

$v = -\alpha^{-1}\alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha^{-1}\alpha_n u_n$ ($\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es un sistema de generadores de $\mathscr{V}$)

Teorema:

En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ de dimensión n, todo conjunto libre de vectores puede completarse para obtener una base, es decir si $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$, $k < n$, es libre, existen $n-k$ vectores $u_{k+1}, \cdots, u_n \in \mathscr{V}$ de modo que $\{u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_n\}$ es una base de $\mathscr{V}$

Dado $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ siempre podemos encontrar algún vector linealmente independiente con ellos, ya que de lo contrario $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ sería una base, lo que contradice que $k < n$. Sea u_{k+1} ese vector. Repitiendo el razonamiento para $\{u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}\}$ llegaremos a encontrar n vectores linealmente independientes, que han de ser necesariamente base

Lema:

En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ de dimensión n, si el conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_m\}$ es un sistema de generadores de $\mathscr{V}$ y los vectores $u_{k+1}, \cdots, u_m$ son combinación de lineal de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_k$, entonces $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ es un sistema de generadores de $\mathscr{V}$

Por ser $\{u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_m\}$ sistema de generadores de $\mathscr{V}$: $\forall v \in \mathscr{V},\ v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \alpha_m u_m$

Por ser los $m-k$ últimos combinación lineal de los k primeros: $\begin{cases} u_{k+1} = \alpha_{1\,k+1} u_1 + \cdots + \alpha_{k\,k+1} u_k \\ \vdots \\ u_m = \alpha_{1\,m} u_1 + \cdots + \alpha_{k\,m} u_k \end{cases}$

Sustituyendo: $\forall v \in \mathscr{V},\ v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1}(\alpha_{1\,k+1} u_1 + \cdots + \alpha_{k\,k+1} u_k) + \cdots + \alpha_m(\alpha_{1\,m} u_1 + \cdots + \alpha_{k\,m} u_k)$

$$v = (\alpha_1 + \alpha_{k+1}\alpha_{1\,k+1} + \cdots + \alpha_m \alpha_{1\,m}) u_1 + \cdots + (\alpha_k + \alpha_{k+1}\alpha_{k\,k+1} + \cdots + \alpha_m \alpha_{k\,m}) u_k$$

Es decir $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ es un sistema de generadores de $\mathscr{V}$

Teorema:

Si S es un sistema de generadores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ de dimensión n, podemos encontrar un subconjunto de S con n elementos que sea una base de $\mathscr{V}$

Elegimos $u_1 \in S$, $u_1 \neq 0$. A continuación elegimos $u_2 \in S$ con $\{u_1, u_2\}$ libre. Suponiendo elegidos $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$, elegimos $u_{k+1} \in S$ de modo que $\{u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}\}$ sea libre. Se repite este proceso hasta que sea imposible añadir un nuevo vector de S que sea linealmente independiente con los obtenidos $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$. Este conjunto será sistema de generadores de $\mathscr{V}$ (lema anterior) y por construcción, libre. Por tanto será una base y $m = n$

Cambio de base

Sean $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}, B' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_n\}$ bases del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$, denominadas *base antigua* y *base nueva* respectivamente

Podremos escribir, por ser B base de $\mathscr{V}$:

$$\begin{gathered} v'_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ v'_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ \vdots \\ v'_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{gathered}$$

y denominaremos matriz del cambio de base de B a B' a $M_B^{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Y análogamente, por ser B' base de $\mathscr{V}$:

$$\begin{gathered} v_1 = a'_{11}v'_1 + a'_{21}v'_2 + \cdots + a'_{n1}v'_n \\ v_2 = a'_{12}v'_1 + a'_{22}v'_2 + \cdots + a'_{n2}v'_n \\ \vdots \\ v_n = a'_{1n}v'_1 + a'_{2n}v'_2 + \cdots + a'_{nn}v'_n \end{gathered}$$

y denominaremos matriz del cambio de base de B' a B a $M_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$

Nótese que la columna i de $M_B^{B'}$ son las coordenadas de v'_i respecto de los vectores de la base B

Ambas matrices de cambio de base son invertibles y $M_B^{B'^{-1}} = M_{B'}^B$

$$\begin{aligned}
v_1 &= a'_{11}v'_1 + a'_{21}v'_2 + \cdots + a'_{n1}v'_n &&= a'_{11}(a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n) + \cdots + a'_{n1}(a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n) &&= (a'_{11}a_{11} + \cdots + a'_{n1}a_{1n})v_1 + \cdots + (a'_{11}a_{n1} + \cdots + a'_{n1}a_{nn})v_n \\
v_2 &= a'_{12}v'_1 + a'_{22}v'_2 + \cdots + a'_{n2}v'_n &&= a'_{12}(a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n) + \cdots + a'_{n2}(a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n) &&= (a'_{12}a_{11} + \cdots + a'_{n2}a_{1n})v_1 + \cdots + (a'_{12}a_{n1} + \cdots + a'_{n2}a_{nn})v_n \\
&\vdots && \vdots \\
v_n &= a'_{1n}v'_1 + a'_{2n}v'_2 + \cdots + a'_{nn}v'_n &&= a'_{1n}(a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n) + \cdots + a'_{nn}(a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n) &&= (a'_{1n}a_{11} + \cdots + a'_{nn}a_{1n})v_1 + \cdots + (a'_{1n}a_{n1} + \cdots + a'_{nn}a_{nn})v_n
\end{aligned}$$

Y como las coordenadas respecto de una base son únicas:

$$\begin{aligned}
&a_{11}a'_{11} + \cdots + a_{1n}a'_{n1} = 1 \\
&\qquad\vdots \\
&a_{n1}a'_{11} + \cdots + a_{nn}a'_{n1} = 0 \\
&a_{11}a'_{12} + \cdots + a_{1n}a'_{n2} = 0 \\
&a_{21}a'_{12} + \cdots + a_{2n}a'_{n2} = 1 \\
&\qquad\vdots \\
&a_{n1}a'_{12} + \cdots + a_{nn}a'_{n2} = 0 \\
&\qquad\vdots \\
&a_{11}a'_{1n} + \cdots + a_{1n}a'_{nn} = 0 \\
&\qquad\vdots \\
&a_{n1}a'_{1n} + \cdots + a_{nn}a'_{nn} = 1
\end{aligned}$$

abreviadamente: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

o bien: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$

Es decir: $M_B^{B'} \cdot M_{B'}^B = I_n$ de lo que inmediatamente se deduce $M_B^{B'^{-1}} = M_{B'}^B$ y $M_{B'}^{B^{-1}} = M_B^{B'}$

Teorema (cambio de base):

Sea el vector $v \in \mathscr{V}$, y $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}, B' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_n\}$ bases del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$ (*base antigua* y *base nueva)*

Denominemos $V_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ y $V_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$ a las coordenadas de v respecto de la bases B y B' respectivamente

Se verifican: $V_B = M_B^{B'} \cdot V_{B'}$ y $V_{B'} = M_{B'}^{B} \cdot V_B \quad (V_{B'} = M_B^{B'^{-1}} \cdot V_B)$

Siendo B, B' bases de $\mathscr{V}$ podremos escribir

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \qquad V_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad v = \alpha'_1 v'_1 + \cdots + \alpha'_n v'_n \qquad V_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v &= \alpha'_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n) + \alpha'_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n) + \cdots + \alpha'_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n) \\ &= (a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + \cdots + a_{1n}\alpha'_n)v_1 + (a_{21}\alpha'_1 + a_{22}\alpha'_2 + \cdots + a_{2n}\alpha'_n)v_2 + \cdots + (a_{n1}\alpha'_1 + a_{n2}\alpha'_2 + \cdots + a_{nn}\alpha'_n)v_n \end{aligned}$$

Al ser las coordenadas respecto una base únicas:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + \cdots + a_{1n}\alpha'_n \\ \alpha_2 &= a_{21}\alpha'_1 + a_{22}\alpha'_2 + \cdots + a_{2n}\alpha'_n \\ &\vdots \\ \alpha_n &= a_{n1}\alpha'_1 + a_{n2}\alpha'_2 + \cdots + a_{nn}\alpha'_n \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien:} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

Es decir: $V_B = M_B^{B'} \cdot V_{B'}$ y al ser $M_B^{B'}, M_{B'}^{B}$ inversas: $V_{B'} = M_{B'}^{B} \cdot V_B$

Las coordenadas de v respecto de la base B pueden obtenerse multiplicando la matriz de cambio de la base B a B' por las coordenadas de v respecto de la base B'

Sección 4

Subespacios vectoriales y operaciones

Un subconjunto $W \subset \mathscr{V}$ del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$ es un **subespacio vectorial** de $\mathscr{V}$ si W es un $\mathbb{K}$-e.v. con las operaciones definidas en $\mathscr{V}$

$W \subset \mathscr{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$ $\iff$ $\begin{cases} W \neq \varnothing \\ \forall u, v \in W, u + v \in W \\ \forall u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha u \in W \end{cases}$

Subespacios impropios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$: $\{0\}$ y $\mathscr{V}$

$\mathscr{V}$ es $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita n $\implies$ la dimensión de cualquier subespacio de $\mathscr{V}$ no supera a n

Ejemplos:

Todas las rectas y planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$

$\mathbb{K}_m[x]$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$

Siendo $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ un conjunto de vectores de un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$, el conjunto

$L(S) = \{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots a_mu_m \,|\, a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{K}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$ denominado **subespacio generado** por S

El conjunto $S \subset \mathbb{K}^n$ de soluciones de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$. Su dimensión es $r = n - \mathrm{r}(A)$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array} \right\} \qquad x \in S \iff A \cdot x = 0$$

Análogamente, todo subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ puede expresarse por un sistema homogéneo. Veamos un ejemplo:

Sea V el subespacio de $\mathbf{R}^5$ que tiene como base $\{(1,2,0,1,0),(1,1,1,1,1)\}$, formada por los vectores e_1', e_2'

Dado cualquier vector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$ el conjunto de vectores $\{e_1', e_2', x\}$ deberá ser ligado y tener rango 2

Por tanto la matriz formada -por columnas- con las coordenadas† de esos tres vectores tendrá rango 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix}$$

Obtenemos una forma escalonada de esa matriz_

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_5 \end{pmatrix}$$

para que tenga rango 2, ha de verificarse el sistema homogéneo: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$

† Nótese que respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^5$, el elemento $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ se escribe $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5$ y sus coordenadas respecto de esa misma base son $c_C(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

Operaciones con subespacios vectoriales:

Sean $U, W \subset \mathscr{V}$ subespacios del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$, los siguientes conjuntos:

I. $U \cap W = \{v \in \mathscr{V} \mid\mid v \in U \wedge v \in W\}$ **Intersección** de los subespacios vectoriales U y W

II. $U + W = \{u + w \mid\mid u \in U \wedge w \in W\}$ **Suma** de los subespacios vectoriales U y W

son subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$

$$x, y \in U \cap W \implies x, y \in U \wedge x, y \in W \implies x + y \in U \wedge x + y \in W \implies x + y \in U \cap W$$

$$x \in U \cap W \implies x \in U \wedge x \in W \implies \alpha x \in U \wedge \alpha x \in W \implies \alpha x \in U \cap W$$

$$x, y \in U + W \implies \underset{x_u \in U \wedge x_w \in W}{x = x_u + x_w} \wedge \underset{y_u \in U \wedge y_w \in W}{y = y_u + y_w} \implies \underset{x_u + y_u \in U \wedge x_w + y_w \in W)}{x + y = (x_u + y_u) + (x_w + y_w)} \implies x + y \in U + W$$

$$x \in U + W \implies \underset{x_u \in U \wedge x_w \in W}{x = x_u + x_w} \implies \underset{\alpha x_u \in U \wedge \alpha x_w \in W}{\alpha x = (\alpha x_u) + (\alpha x_w)} \implies \alpha x \in U + W$$

La **unión** de espacios vectoriales $U \cup W = \{v \in \mathscr{V} \mid\mid v \in U \vee v \in W\}$ **no es**, en general, **subespacio vectorial** del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$

(Contra-)ejemplo: En $\mathbf{R}^3$ la unión de los subespacios:

$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid\mid x + y + z = 0\}$ y $P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid\mid x = 0\}$ no es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$

$(1,1,-2) \in P_1 \wedge (0,1,1) \in P_2 \implies (1,1,-2), (0,1,1) \in P_1 \cup P_2$ y $(1,1,-2) + (0,1,1) = (1,2,-1) \notin P_1 \cup P_2$

Proposición (fórmula de Grassman):

Sean $U, W \subset \mathscr{V}$ subespacios del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$ de dimensión n. Se verifica: $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Sean $\dim(U) = n$, $\dim(W) = m$ y $\dim(U \cap W) = r$ y $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ una base de $U \cap W$

Completamos dicha base para formar bases de U y W a partir de ella (añadiendo $n-r$ y $m-r$ vectores respectivamente)

$B_U = \{e_1, e_2, \cdots, e_r, u_1, \cdots, u_{n-r}\}$ $B_W = \{e_1, e_2, \cdots, e_r, w_1, \cdots, w_{m-r}\}$

Sea el conjunto $B = B_U \cup B_W = \{e_1, e_2, \cdots, e_r, u_1, \cdots, u_{n-r}, w_1, \cdots, w_{m-r}\}$, formado por $r + (n-r) + (m-r) = n + m - r$ vectores

I. $B_U \cup B_W$ es sistema de generadores de $U + W$

$$x \in U + W \implies \underset{x_u \in U \wedge x_w \in W}{x = x_u + x_w} \implies x = x_{u1}e_1 + \cdots x_{ur}e_r + x'_{u1}u_1 + \cdots + x'_{u\,n-r}u_{n-r} + x_{w1}e_1 + \cdots x_{wr}e_r + x'_{w1}w_1 + \cdots + x'_{w\,m-r}w_{m-r}$$

$$\implies x = (x_{u1} + x_{w1})e_1 + \cdots(x_{ur} + \cdots x_{wr})e_r + x'_{u1}u_1 + \cdots + x'_{u\,n-r}u_{n-r} + x'_{w1}w_1 + \cdots + x'_{w\,m-r}w_{m-r} \implies x \in L(B_U \cup B_W)$$

II. B es libre

Sea $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{n-r}u_{n-r} + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{m-r}w_{m-r} = 0$ y podemos escribir:

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{n-r}u_{n-r} = -\gamma_1 w_1 - \cdots - \gamma_{m-r}w_{m-r} \implies \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{n-r}u_{n-r} \in U \cap W$$

$\implies \beta_1 = \cdots = \beta_{n-r} = 0$ quedando $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{m-r}w_{m-r} = 0$ y al ser B_W base:

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{m-r} = 0$

Por tanto $B = B_U \cup B_W$ es una base de $U + W$ y $\dim(U+W) = n + m - r = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Suma directa:

Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{V}$ es **suma directa** de dos de sus subespacios $U, W \subset \mathscr{V}$:

1. $\mathscr{V} = U + W$

2. $U \cap W = \{0\}$

y escribiremos $\mathscr{V} = U \oplus W$. Se verifica que: $\dim(\mathscr{V}) = \dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$

Ejemplos. En $\mathbf{R}^3$:

Sean P_1, P_2 planos que pasan por el origen y se cortan en la recta $R = P_1 \cap P_2$

$\dim(P_1 + P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(P_1 \cap P_2) = 2 + 2 - 1 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R^3} = P_1 + P_2$

Sean P un plano y R una recta no contenida en él que pasan por el origen

$\dim(P + R) = \dim(P) + \dim(R) - \dim(P \cap R) = 2 + 1 - 0 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R^3} = P \oplus R$

Proposición:

$$\mathscr{V} = U \oplus W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall v \in \mathscr{V}, \exists! u \in U, \exists! w \in W, v = u + w$$

$v \in \mathscr{V} \wedge v = u + w \wedge v = u' + w' \implies u + w = u' + w' \implies u - u' = w' - w, \implies u - u' \in U \wedge w' - w \in W$

$\implies u - u' \in U \cap W \wedge w' - w \in U \cap W \qquad U \cap W = \{0\} \implies u - u' = w' - w = 0 \implies u = u' \wedge w' = w$

$v \in U \cap W \implies v = 0 + v \wedge v = v + 0 \implies v = 0$ Esto es: $U \cap W \subset \{0\}$. Como $\{0\} \subset U \cap W$ tenemos que $U \cap W = \{0\}$

Definiciones:

Sean $V_1, V_2, \cdots, V_n \subset \mathscr{V}$ subespacios del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$, los siguientes conjuntos:

I. $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n = \{v \in \mathscr{V} \mid \mid \forall i \in \{1,\cdots,n\}, v \in V_i\}$

II. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \{v_1 + v_2 + \cdots + v_n \mid \mid \forall i \in \{1,\cdots,n\}, v_i \in V_i\}$

son subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$

La suma de los subespacios vectoriales $V_1, V_2, \cdots, V_n$ se dice que es **suma directa,** que escribiremos $\mathscr{V} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ si

$$\forall v \in \mathscr{V}, \exists! v_1 \in V_1, \exists! v_2 \in V_2, \cdots, \exists! v_n \in V_n, v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

y se verifica: $\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_n)$

Aplicaciones lineales

- **Aplicaciones lineales**
- **Núcleo e imagen**
- **Representación matricial. Cambios de base**
- **Composición de aplicaciones lineales**

Sección 1

Aplicación lineal entre espacios vectoriales

Sean los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$. Diremos que una aplicación $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$

es una **aplicación lineal** $\iff \begin{cases} \forall u, v \in \mathscr{V}, f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall v \in \mathscr{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha v) = \alpha f(v) \end{cases}$

Ejemplo:

$D : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ $\qquad D(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n) = p_1 + 2p_2 x + \cdots + np_n x^{n-1}$

(alternativamente puede definirse $D : \mathbb{K}_m[x] \to \mathbb{K}[x]$ $\qquad D : \mathbb{K}_m[x] \to \mathbb{K}_m[x]$ o incluso $D : \mathbb{K}_m[x] \to \mathbb{K}_{m-1}[x]$)

Propiedades:

I. $f(0) = 0$

$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$

II. $\forall v \in \mathscr{V}, f(-v) = -f(v)$

$f(-v) = f(-1v) = (-1)f(v) = -f(v)$

III. $V \subset \mathscr{V}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{V} \implies f(V) \subset \mathscr{W}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{W}$

$$w_1, w_2 \in f(V) \implies \exists v_1, v_2 \in V, f(v_1) = w_1 \wedge f(v_2) = w_2 \implies \begin{cases} w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \wedge v_1 + v_2 \in V \implies w_1 + w_2 \in f(V) \\ \alpha w_1 = \alpha f(v_1) = f(\alpha v_1) \wedge \alpha v_1 \in V \implies \alpha w_1 \in f(V) \end{cases}$$

IV. $W \subset \mathscr{W}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{W} \implies f^{-1}(W) \subset \mathscr{V}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{V}$

$$v_1, v_2 \in f^{-1}(W) \implies f(v_1), f(v_2) \in W \implies \begin{cases} f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in W \implies v_1 + v_2 \in f^{-1}(W) \\ \alpha f(v_1) = f(\alpha v_1) \in W \implies \alpha v_1 \in f^{-1}(W) \end{cases}$$

V. $\dim(V) = k \implies \dim(f(V)) \leq k$

$B = \{e_1, \cdots, e_k\}$ base de $\mathscr{V} \implies \forall v \in \mathscr{V}, v = v_1 e_1 + \cdots + v_k e_k \implies f(v) = f(v_1 e_1 + \cdots v_k e_k) = v_1 f(e_1) + \cdots + v_k f(e_k)$

$\implies f(v) \in L(\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_k)\}) = f(V) \implies \dim(f(V)) \leq k$

VI. $B=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ base de $\mathscr{V}$ y $\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ vectores cualesquiera de $\mathscr{W} \Longrightarrow$ existe una única aplicación lineal $f:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$

$$f(e_1)=w_1 \wedge f(e_2)=w_2 \wedge \cdots \wedge f(e_n)=w_n$$

Sean: $\begin{cases} u=u_1e_1+\cdots u_ne_n \in \mathscr{V} \\ v=v_1e_1+\cdots v_ne_n \in \mathscr{V} \end{cases}$ Definamos f de modo que $f(e_1)=w_1 \wedge f(e_2)=w_2 \wedge \cdots \wedge f(e_n)=w_n$

Se verificará $\begin{cases} f(u)=f(u_1e_1+\cdots+u_ne_n)=u_1f(e_1)+\cdots+u_nf(e_n)=u_1w_1+\cdots+u_nw_n \\ f(v)=f(v_1e_1+\cdots+v_ne_n)=v_1f(e_1)+\cdots+v_nf(e_n)=v_1w_1+\cdots+v_nw_n \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(u+v) = f(u_1e_1+\cdots u_ne_n+v_1e_1+\cdots+v_ne_n)=f((u_1+v_1)e_1+\cdots+(u_n+v_n)e_n) \\ \qquad = (u_1+v_1)w_1+\cdots+(u_n+v_n)w_n=u_1w_1+\cdots+u_nw_n+v_1w_1+\cdots+v_nw_n = f(u)+f(v) \\ f(\alpha u) = f(\alpha u_1e_1+\cdots+\alpha u_ne_n)=\alpha u_1w_1+\cdots+\alpha u_ne_n=\alpha(u_1w_1+\cdots+u_nw_n) = \alpha f(u) \end{cases}$$

(f es lineal)

Supuestas dos aplicaciones lineales f,g que satisfagan $f(e_1)=g(e_1)=w_1 \wedge f(e_2)=g(e_2)=w_2 \wedge \cdots \wedge f(e_n)=g(e_n)=w_n$

$$f(v)=f(v_1e_1+\cdots+v_ne_n)=v_1f(e_1)+\cdots+v_nf(e_n)=v_1w_1+\cdots+v_nw_n=v_1g(e_1)+\cdots+v_ng(e_n)=g(v_1e_1+\cdots+v_ne_n)=g(v)$$

VII. $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ ligado $\Longrightarrow \{f(v_1),f(v_2),\cdots,f(v_k)\}$ ligado

$$\exists \alpha_j \neq 0, \alpha_1v_1+\cdots+\alpha_jv_j+\cdots\alpha_kv_k=0 \Longrightarrow \alpha_1f(v_1)+\cdots+\alpha_jf(v_j)+\cdots\alpha_kf(v_k)=f(0)=0 \wedge \alpha_j\neq 0$$

VIII. $\{f(v_1),f(v_2),\cdots,f(v_k)\}$ libre $\Longrightarrow \{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ libre

IX. $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ libre, f inyectiva $\implies \{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_k)\}$ libre

$\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k) = 0 \implies f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = 0 \implies \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$

X. $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ base de $\mathscr{V}$, f sobreyectiva $\implies \{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_k)\}$ sistema de generadores de $\mathscr{W}$

$\forall w \in \mathscr{W}, \exists v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k)$

XI. $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ base de $\mathscr{V}$, f biyectiva $\implies \{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_k)\}$ base de $\mathscr{W}$

f inyectiva $\implies \{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_k)\}$ libre

f sobreyectiva $\implies \{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_k)\}$ sistema de generadores de $\mathscr{W}$

Sección 2

Representaciones matriciales de una aplicación lineal

Sean los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ y la aplicación lineal $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$

Sean $\dim(\mathscr{V}) = n$, $\dim(\mathscr{W}) = m$, $B_{\mathscr{V}} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de $\mathscr{V}$, y $B_{\mathscr{W}} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de $\mathscr{W}$

$$\begin{cases} f(v_1) \in \mathscr{W} \implies f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) \in \mathscr{W} \implies f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \qquad \vdots \\ f(v_n) \in \mathscr{W} \implies f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{cases} \implies f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots \alpha_n f(v_n) \qquad \text{y sustituyendo}$$

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots \alpha_n f(v_n) = \alpha_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots \alpha_n(a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m) = (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n})w_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn})w_m$$

Si denominamos a $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases $B_{\mathscr{V}}$ y $B_{\mathscr{W}}$:

$$c_{B_{\mathscr{W}}}(f(v)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \text{Es decir} \quad c_{B_{\mathscr{W}}}(f(v)) = F \cdot c_{B_{\mathscr{V}}}(v)$$

Nótese que la columna j de la matriz F son las coordenadas respecto de la base $B_{\mathscr{W}}$ de la imagen del vector v_j de la base $B_{\mathscr{V}}$, $f(v_j)$

Obtenemos las coordenadas de la imagen $f(v)$ respecto de la base $B_{\mathscr{W}}$ multiplicando la matriz F por las coordenadas de v respecto de la base $B_{\mathscr{V}}$

Toda aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita puede representarse mediante una matriz respecto a dos bases dadas.

Análogamente, dadas dos bases de un par de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, n y m, toda matriz de $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ representa a una única aplicación lineal entre ambos espacios.

Llamando $\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ al conjunto de aplicaciones lineales $f:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ $\left(f\in\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})\right.$, $\left.\dim(\mathscr{V})=n\wedge\dim(\mathscr{W})=m\right)$ podemos definir

$$+:\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})\times\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})\to\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W}) \qquad \forall f,g\in\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W}),\forall x\in\mathscr{V},(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$\cdot:\mathbb{K}\times\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})\to\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W}) \qquad \forall f\in\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W}),\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall x\in\mathscr{V},(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

Podemos comprobar que efectivamente $(f+g)$ y (αf) son aplicaciones lineales y que $\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

Entre los espacios vectoriales $\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ y $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existe una aplicación (lineal) biyectiva

Se verifica además que $\dim(\mathbb{L}(\mathscr{V},\mathscr{W}))=\dim(\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}))=m\cdot n$

Cambios de base en aplicaciones lineales:

Consideremos los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ y la aplicación lineal $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$, siendo $\dim(\mathscr{V}) = n$, $\dim(\mathscr{W}) = m$

Sean $B_{\mathscr{V}} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de $\mathscr{V}$, $B_{\mathscr{W}} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de $\mathscr{W}$ y $F \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz de f respecto de ambas

Consideremos otra base de $\mathscr{V}$, $B'_{\mathscr{V}} = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$, y otra de $\mathscr{W}$, $B'_{\mathscr{W}} = \{w'_1, \cdots, w'_m\}$

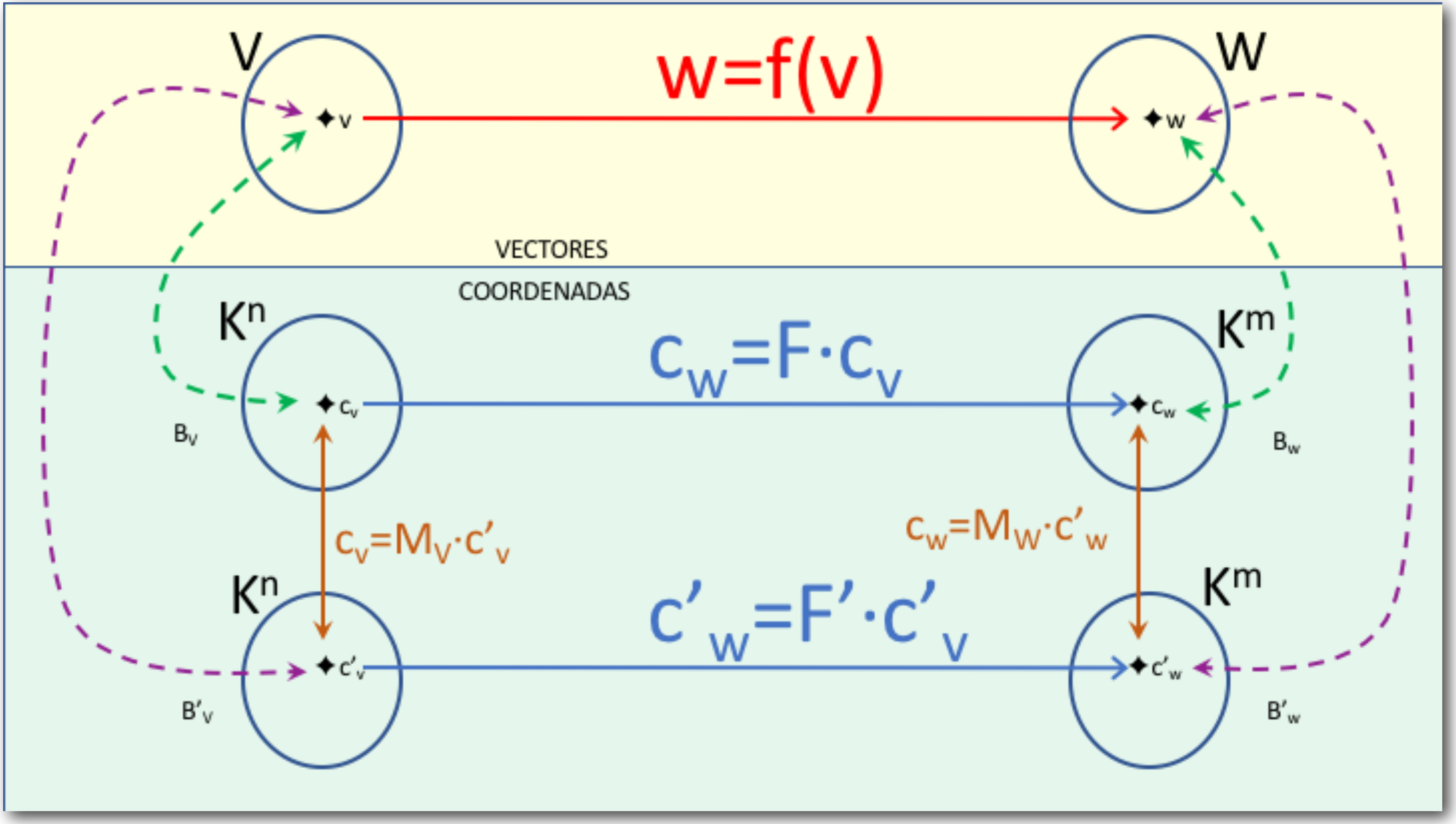
Llamemos $M_{B_{\mathscr{V}}}^{B'_{\mathscr{V}}}$ y $M_{B_{\mathscr{W}}}^{B'_{\mathscr{W}}}$ las correspondientes matrices de cambio de base:

- Dado $v \in \mathscr{V}$ llamemos c_v a sus coordenadas respecto a $B_{\mathscr{V}}$ y c'_v a sus coordenadas respecto a $B'_{\mathscr{V}}$ $\qquad c_v = M_{B_{\mathscr{V}}}^{B'_{\mathscr{V}}} \cdot c'_v$
- Siendo $w = f(v) \in \mathscr{W}$ llamemos c_w a sus coordenadas respecto a $B_{\mathscr{W}}$ y c'_w a sus coordenadas respecto a $B'_{\mathscr{W}}$ $\qquad c_w = M_{B_{\mathscr{W}}}^{B'_{\mathscr{W}}} \cdot c'_w$
- La relación entre ambas coordenadas es $c_w = F \cdot c_v$

Podemos escribir $M_{B_{\mathscr{W}}}^{B'_{\mathscr{W}}} \cdot c'_w = F \cdot M_{B_{\mathscr{V}}}^{B'_{\mathscr{V}}} \cdot c'_v \iff c'_w = (M_{B_{\mathscr{W}}}^{B'_{\mathscr{W}}})^{-1} \cdot F \cdot M_{B_{\mathscr{V}}}^{B'_{\mathscr{V}}} \cdot c'_v$

Si denominamos F' la matriz de f respecto de las bases $B'_{\mathscr{V}}$ y $B'_{\mathscr{W}}$, se verificará $c'_w = F' \cdot c'_v$ y por tanto:

$$F' = (M_{B_{\mathscr{W}}}^{B'_{\mathscr{W}}})^{-1} \cdot F \cdot M_{B_{\mathscr{V}}}^{B'_{\mathscr{V}}}$$



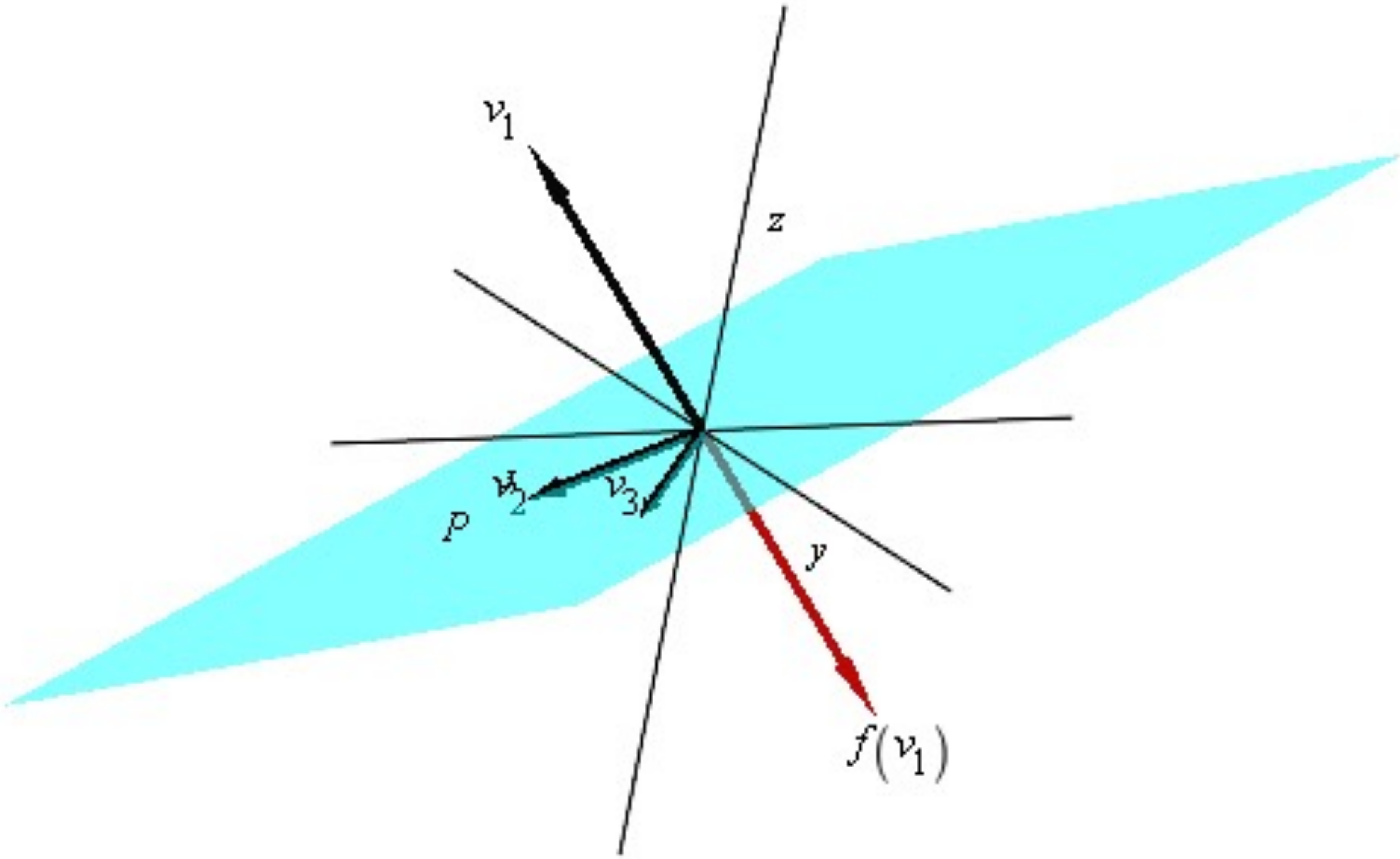
En este esquema M_V se refiere a $M_{B_{\mathcal{V}}}^{B'_{\mathcal{V}}}$ y M_W a $M_{B_{\mathcal{W}}}^{B'_{\mathcal{W}}}$

Ejemplo:

Considere la (aplicación lineal de) simetría respecto al plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x - y + 2z = 0\}$

Encontremos la matriz de esta aplicación lineal respecto de la base canónica (tanto en el dominio como en el codominio)

Una base de $\mathbf{R}^3$ para que es sencillo encontrar las imágenes de sus vectores es $B' = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, -1,2), (1, -1, -1), (2,2,0)\}$



$$f(v_1) = -v_1 = (-1,1,-2) \qquad f(v_2) = v_2 = (1,-1,-1) \qquad f(v_3) = v_3 = (2,2,0)$$

La matriz de f respecto de esta base B' está formada por las coordenadas (columnas) de $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ respecto de esta base:

$$\begin{cases} f(v_1) = & -v_1 = & (-1)v_1 + & 0v_2 + & 0v_3 \\ f(v_2) = & v_2 = & 0v_1 + & 1v_2 + & 0v_3 \\ f(v_3) = & v_3 = & 0v_1 + & 0v_2 + & 1v_3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad F' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base, de la base canónica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a la base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, está formada por las coordenadas (columnas) de v_1, v_2, v_3 respecto de la base canónica

$$\begin{cases} v_1 = & (1,-1,2) = & 1e_1 + & (-1)e_2 + & 2e_3 \\ v_2 = & (1,-1,-1) = & 1e_1 + & (-1)e_2 + & (-1)e_3 \\ v_3 = & (2,2,0) = & 2e_1 + & 2e_2 + & 0e_3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La relación entre la matriz pedida F y las obtenidas arriba es $\qquad F' = (M_B^{B'})^{-1} \cdot F \cdot M_B^{B'} \qquad$ lo que puede escribirse:

$$F = M_B^{B'} \cdot F' \cdot (M_B^{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto, respecto de la base canónica:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)$$

Sección 3

Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sean los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ y la aplicación lineal $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$

Núcleo de f: $N(f) = \ker(f) = \{v \in \mathscr{V} \mid f(v) = 0\}$

Propiedades:

I. $0 \in \ker(f) \quad (\ker(f) \neq \varnothing)$

$f(0) = 0 \implies 0 \in \ker(f)$

II. $\ker(f) \subset \mathscr{V}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{V}$

$v, w \in \ker(f) \implies f(v) = 0 \wedge f(w) = 0 \implies f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0 \implies v + w \in \ker(f)$

$v \in \ker(f) \implies f(v) = 0 \implies f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha 0 = 0 \implies \alpha v \in \ker(f)$

III. f es inyectiva $\iff \ker(f) = \{0\}$

$f(0) = 0 \wedge f$ inyectiva $\wedge\, v \in \ker(f) \implies f(v) = 0 \implies v = 0 \implies \ker(f) = \{0\}$

$\ker(f) = \{0\} \wedge f(v) = f(w) \implies f(v) - f(w) = 0 \implies f(v - w) = 0 \implies v - w \in \ker(f) \implies v - w = 0 \implies v = w$

Ejemplo: Encontrar el núcleo de la aplicación lineal $t : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$, cuya matriz (respecto la b.c.) es $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Se trata de encontrar los vectores $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ tales que $t(v) = 0$, es decir:

$$T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema homogéneo de 3 ecuaciones y 5 incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 = & -v_3 - 2v_4 & = & -\lambda - 2\mu \\ v_2 = & v_4 - v_5 & = & \mu - \gamma \\ v_3 = & \lambda & & \\ v_4 = & \mu & & \\ v_5 = & \gamma & & \end{cases} \implies \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2\mu \\ \mu - \gamma \\ \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \\ 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(t) = L(\{(1,0,1,0,0), (-2,1,0,1,0), (0,-1,0,0,1)\})$$

Nótese que $r(T) = 2$ y que $\dim(\ker(t)) = 3$

Sean los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ y la aplicación lineal $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$

Imagen de f: $\operatorname{img}(f) = f(\mathscr{V}) = \{w \in \mathscr{W} \mid \exists v \in \mathscr{V}, f(v) = w\}$

Propiedades:

I. $0 \in \operatorname{img}(f)$ ($\operatorname{img}(f) \neq \varnothing$)

$f(0) = 0 \implies 0 \in \operatorname{img}(f)$

II. $\operatorname{img}(f) \subset \mathscr{W}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{W}$

$\operatorname{img}(f) = f(\mathscr{V})$ por ser la imagen de un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$

III. f es sobreyectiva $\iff$ $\operatorname{img}(f) = \mathscr{W}$

IV. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de $\mathscr{V}$ $\implies$ $\{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)\}$ es sistema de generadores de $\operatorname{img}(f)$

$w \in \operatorname{img}(f) \implies \exists v \in \mathscr{V}, v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \wedge w = f(v) \implies w = f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$

$\implies w \in L(\{f(v_1), \cdots, f(v_n)\})$

Corolario: $\dim(\operatorname{img}(f)) \leq \dim(\mathscr{V})$

Definición: Se denomina **rango** de la aplicación lineal f, $\operatorname{r}(f) = \dim(\operatorname{img}(f))$

Ejemplo: Encontrar la imagen de la aplicación lineal $t : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$, cuya matriz (respecto la b.c.) es $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Se trata de encontrar los vectores $w = (w_1, w_2, w_3)$ tales que $\exists v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5), t(v) = w$, es decir:

$$w = T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + v_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{img}(t) = L(\{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,-1,2), (1,1,0)\}) = \operatorname{col}(T)$$

$$\operatorname{img}(t) = L(\{(1,0,1), (1,1,0)\})$$

Recuérdese que $\operatorname{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y que sus dos primeras columnas son l.i.

$$\dim(\operatorname{img}(t)) = \operatorname{r}(T) = \dim(\operatorname{col}(T)) = 2$$

Podemos expresar img(t) mediante un sistema de ecuaciones:

$$\operatorname{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 2 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x+y \end{pmatrix} \implies x - y - z = 0$$

Teorema: Sean los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$, con $\dim(\mathscr{V}) = n$, y la aplicación lineal $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{img}(f)) = \dim(\mathscr{V})$$

Sea $k = \dim(\ker(f))$, $k \leq n$ Elijamos una base de $\ker(f)$, $B_K = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$

Completémosla con $n - k$ vectores hasta obtener una base de $\mathscr{V}$, $B_V = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$

Consideremos $B = \{f(v_{k+1}), \cdots, f(v_n)\}$

$w \in \operatorname{img}(f) \implies \exists v \in \mathscr{V}, v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n, w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) =$

$= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \implies w \in L(B)$

(es decir, B es sistema de generadores de $\operatorname{img}(f)$)

Además, si $\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = 0 \implies f(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0 \implies \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in \ker(f)$

$\implies \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \implies \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \cdots - \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$

(es decir, B es libre)

Por tanto B es base de $\operatorname{img}(f)$ y $\dim(\operatorname{img}(f)) = n - k = \dim(\mathscr{V}) - \dim(\ker(f))$

Corolarios:

I. $\dim(\mathrm{img}(f)) \leq \dim(\mathscr{V})$ $\qquad$ $\dim(\ker(f)) \leq \dim(\mathscr{V})$

II. f inyectiva $\iff \dim \mathscr{V} = r(f) = \dim(\mathrm{img}(f))$

III. f inyectiva $\implies \dim(\mathscr{V}) = \dim(\mathrm{img}(f)) \leq \dim(\mathscr{W})$

IV. f sobreyectiva $\implies \dim(\mathscr{W}) = \dim(\mathrm{img}(f)) \leq \dim(\mathscr{V})$

V. f biyectiva $\implies \dim(\mathscr{V}) = \dim(\mathscr{W})$

Corolario:

Sean los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$, con $\dim(\mathscr{V}) = \dim(\mathscr{W}) = n$, y la aplicación lineal $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$. Son equivalentes:

(a) f inyectiva

(b) f sobreyectiva

(c) f biyectiva

(d) $\ker(f) = \{0\}$

(e) $\mathrm{r}(f) = n$

$$\begin{array}{ccccccc} (c) & \Longrightarrow & (a) & \Longleftrightarrow & (d) & & \\ & & \Updownarrow & \text{(cor. II)} & & & \\ & & (e) & \Longleftrightarrow & (b) & \Longleftarrow & (c) \end{array}$$

Notas (nomenclatura):

Sean los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ y la aplicación lineal $f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$

- Se dice que f es un **homomorfismo**
- Si f es inyectiva se dice que es un **monomorfismo**
- Si f es sobreyectiva se dice que es un **epimorfismo**
- Si f es biyectiva se dice que es un **isomorfismo**
- Si $\mathscr{V} = \mathscr{W}$ se dice que f es un **endomorfismo**
- Si $\mathscr{V} = \mathscr{W}$ y f es biyectiva se dice que es un **automorfismo**

Sección 4

Composición de aplicaciones lineales

Composición:

Siendo $f \in \mathbb{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W}), g \in \mathbb{L}(\mathscr{W}, \mathscr{X})$, la composición de ambas es $h = g \circ f \in \mathbb{L}(\mathscr{V}, \mathscr{X}), \forall v \in \mathscr{V}, h(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v))$

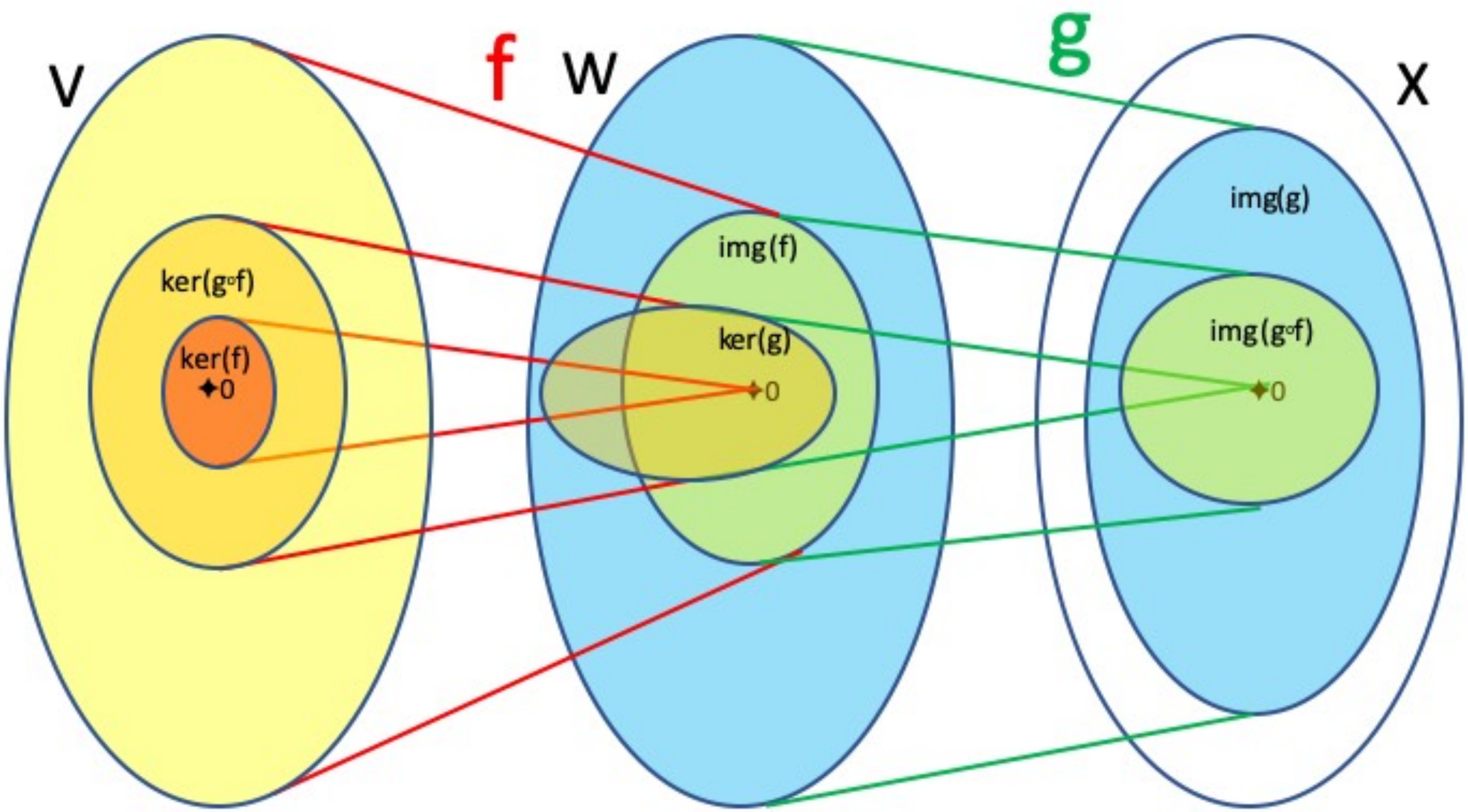
Podemos comprobar que efectivamente $g \circ f$ es una aplicación lineal:

I. $\forall x, y \in \mathscr{V}, (g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$

II. $\forall x \in \mathscr{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K}\ (g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha(g \circ f)(x)$

y que siendo F y G las matrices de f y g, respecto de bases fijadas de antemano, la matriz de $h = g \circ f$ es:

$$H = G \cdot F$$



$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{img}(f)) = \dim(\mathscr{V})$ $\qquad$ $\dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{img}(g)) = \dim(\mathscr{W})$ $\qquad$ $\dim(\ker(g \circ f)) + \dim(\mathrm{img}(g \circ f)) = \dim(\mathscr{V})$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{img}(f) \subset \mathscr{W} \implies \mathrm{img}(g \circ f) \subset \mathrm{img}(g) \implies \mathrm{r}(g \circ f) \leq \mathrm{r}(g) \\ {}^{\dagger}\dim(\ker(g) \cap \mathrm{img}(f)) + \dim(\mathrm{img}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{img}(f)) \implies \mathrm{r}(g \circ f) \leq \mathrm{r}(f) \end{array}\right\} \implies \mathrm{r}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{r}(f), \mathrm{r}(g))$$

† Considerando $g_f : \mathrm{img}(f) \to \mathscr{X}$

Producto escalar y ortogonalidad

- **Espacios euclídeos**
- **Ortogonalidad**
- **Ortogonalización. Método de Gram-Schmidt**
- **Proyecciones ortogonales.**
- **Ejemplo: Series de Fourier**

Sección 1

Productos escalares. Espacios euclídeos

Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbf{R}-e.v.$ ($\mathbf{C}-e.v.$)

Diremos que la aplicación $<\cdot,\cdot>: \mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ $\quad$ $(<\cdot,\cdot>: \mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathbf{C})$ $\quad$ es un **producto escalar (producto hermítico)** sobre $\mathscr{V}$ si verifica las siguientes propiedades:

I. $\forall u, v \in \mathscr{V}$ $\quad$ $<u,v> = <v,u>$ $\quad$ $(<u,v> = \overline{<v,u>})$

II. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathscr{V}$ $\quad$ $<\alpha u, v> = \alpha <u,v>$ $\quad$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall u, v \in \mathscr{V})$

III. $\forall u, v, w \in \mathscr{V}$ $\quad$ $<u+v, w> = <u,w> + <v,w>$

IV. $\forall u \in \mathscr{V}$ $\quad$ $u \neq 0 \implies <u,u> > 0$

Diremos también que $(\mathscr{V}, <\cdot,\cdot>)$ es un **Espacio euclídeo (Espacio hermítico)**

PROPIEDADES

V. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall u, v \in \mathscr{V}$ $\quad < u, \alpha v > = \alpha < u, v >$ $\quad (\forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall u, v \in \mathscr{V}, < u, \alpha v > = \overline{\alpha} < u, v >)$

VI. $\forall u, v, w \in \mathscr{V}$ $\quad < u, v + w > = < u, v > + < u, w >$

VII. $\forall u \in \mathscr{V}$ $\quad < 0,u > = 0$

VIII. $\forall u \in \mathscr{V}$ $\quad u = 0 \Longleftrightarrow < u, u > = 0$

IX. $$< \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j < u_i, v_j > = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} < u_1, v_1 > & \cdots & < u_1, v_m > \\ < u_2, v_1 > & \cdots & < u_2, v_m > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < u_n, v_1 > & \cdots & < u_n, v_m > \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$< \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \overline{b_j} < u_i, v_j > = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} < u_1, v_1 > & \cdots & < u_1, v_m > \\ < u_2, v_1 > & \cdots & < u_2, v_m > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < u_n, v_1 > & \cdots & < u_n, v_m > \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_m} \end{pmatrix}$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA (MATRIZ DE GRAM)

En espacios $\mathscr{V}$ **de dimensión finita**, sean:

una base de $\mathscr{V}$, $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ y dos vectores $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ y $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$

$$< u, v > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j < e_i, e_j > = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & \cdots & < e_1, e_n > \\ < e_2, e_1 > & \cdots & < e_2, e_n > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \cdots & < e_n, e_n > \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$< u, v > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \overline{v_j} < e_i, e_j > = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & \cdots & < e_1, e_n > \\ < e_2, e_1 > & \cdots & < e_2, e_n > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \cdots & < e_n, e_n > \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

El producto escalar o hermítico de dos vectores se puede escribir en función de sus coordenadas y de la matriz de Gram de la base empleada:

$$< u, v > = u^T \cdot G \cdot v \qquad\qquad < u, v > = u^T \cdot G \cdot \overline{v}$$

EJEMPLOS

En $\mathbf{R}^n$

$$< u, v > = < (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n), (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n) > = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots u_n v_n = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

En $\mathbf{C}^n$

$$< u, v > = < (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n), (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n) > = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots u_n \overline{v_n} = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

En $C([a,b];\mathbf{R})$ $\;< f, g > = \int_a^b fg = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

En $C([a,b];\mathbf{C})$ $\;< f, g > = \int_a^b f\,\overline{g} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$

NORMA

Sea $\mathscr{V}$ un $\mathbf{R}-e.v.$ o un $\mathbf{C}-e.v.$

Llamando $\mathbb{K}$ al cuerpo, diremos que la aplicación $\|\cdot\|:\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ es una **norma** sobre $\mathscr{V}$ si verifica las siguientes propiedades:

I. $\forall u\in\mathscr{V}$ $\quad \|u\|\geq 0$

II. $\forall u\in\mathscr{V}$ $\quad u=0 \iff \|u\|=0$

III. $\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall u\in\mathscr{V}$ $\quad \|\alpha u\|=|\alpha|\cdot\|u\|$

IV. $\forall u,v\in\mathscr{V}$ $\quad \|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ (desigualdad triangular)

Toda norma permite definir una distancia $d:\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ de modo que $\forall u,v\in\mathscr{V}, d(u,v)=\|u-v\|$

Propiedades:

$\forall u,v,w\in\mathscr{V}$ I. $d(u,v)\geq 0$ II. $d(u,v)=0 \iff u=v$ III. $d(u,v)=d(v,u)$ IV. $d(u,w)\leq d(u,v)+d(v,w)$

NORMA INDUCIDA

En un espacio euclídeo o hermítico puede definirse la siguiente norma a partir del producto escalar / hermítico del espacio:

$$\|u\|=\sqrt{<u,u>}$$

que cumple además la siguiente propiedad (desigualdad de Schwarz):

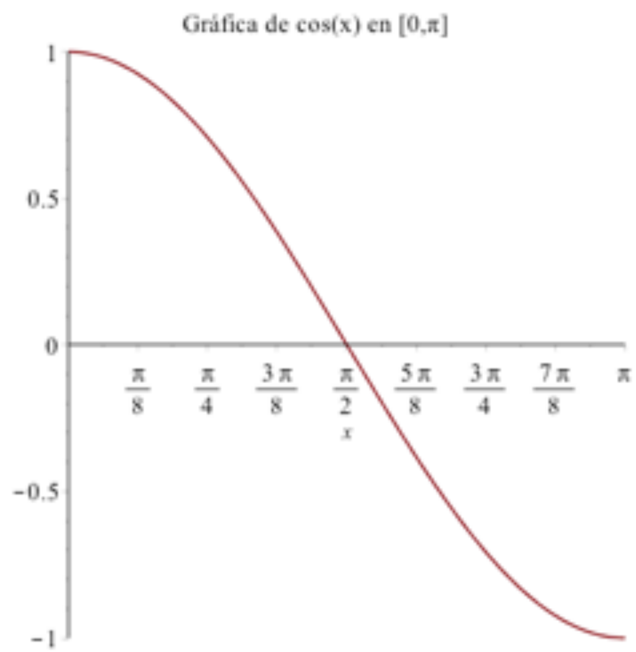
$$\forall u, v \in \mathscr{V} \qquad | < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad (| < u, v > |^2 \leq < u, u > \cdot < v, v >)$$

En el caso de espacios euclídeos, puede escribirse:

$$\forall u, v \in \mathscr{V} \qquad u, v \neq 0 \implies -1 \leq \frac{< u, v >}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

lo que permite definir el ángulo entre u y v ($\measuredangle_{u,v} \in [0,\pi]$):

$$\cos\measuredangle_{u,v} = \frac{< u, v >}{\|u\| \cdot \|v\|}$$



Sección 2

Ortogonalidad entre vectores y subespacios

En Geometría decimos que dos vectores son perpendiculares si el ángulo entre ellos es recto

$$\text{Se verifica que} \qquad \forall u, v \in \mathscr{V} \qquad u, v \neq 0 \wedge \measuredangle_{u,v} = \frac{\pi}{2} \implies < u, v > = 0$$

Generalizando este concepto, definimos, en espacios euclídeos y hermíticos:

Dos vectores $u, v \in \mathscr{V}$ son ortogonales $\iff < u, v > = 0$

Propiedades:

I. 0 es ortogonal a todos los vectores $\qquad \forall u \in \mathscr{V} \quad < 0,u > = 0$

II. Solamente 0 es ortogonal a sí mismo $\qquad < u, u > = 0 \implies u = 0$

III. En un espacio euclídeo, si dos vectores son ortogonales, o bien uno es nulo o bien forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$

$$< u, v > = 0 \implies (u = 0 \vee v = 0 \vee (u \neq 0 \wedge v \neq 0 \wedge \measuredangle_{u,v} = \frac{\pi}{2}))$$

Sea $\mathscr{V}$ un espacio euclídeo o hermítico. Considerando los conjuntos $V, W \subset \mathscr{V}$ y el vector $u \in \mathscr{V}$ definimos:

$$u \text{ es ortogonal a } V \iff \forall v \in V, < u, v > = 0$$

$$V \text{ es ortogonal a } W \iff \forall v \in V, \forall w \in W, < v, w > = 0$$

En el caso de que $V, W \subset \mathscr{V}$ sean subespacios vectoriales de $\mathscr{V}$, con bases $B_V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y $B_W = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ respectivamente, se verifica:

$$u \text{ es ortogonal a } V \iff \forall i \in \{1, \cdots, n\}, < u, v_i > = 0$$

$$V \text{ es ortogonal a } W \iff \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \forall j \in \{1, \cdots, m\}, < v_i, w_j > = 0$$

SISTEMAS ORTOGONALES

Un conjunto finito o numerable de vectores $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$ es un **sistema ortogonal** de vectores si

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies < u_i, u_j > = 0$$

Propiedades:

I. $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$ sistema ortogonal $\wedge\, 0 \notin S \implies S$ es libre

II. $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ sistema ortogonal $\implies \| \sum_{i=1}^{n} u_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$ (teorema generalizado de Pitágoras)

Llamamos **sistema ortonormal** de vectores a un sistema ortogonal de vectores que además verifique:

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\} \quad ||u_i|| = 1$$

Propiedad:

I. A partir de todo sistema ortogonal de vectores que no incluya a 0 podemos construir uno ortonomal

$$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\} \text{ es ortogonal } \wedge\, 0 \notin S \implies T = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \cdots, \frac{u_n}{\|u_n\|}, \cdots \right\} \text{ es ortonormal}$$

Sección 3

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$ un conjunto **libre,** finito o numerable de vectores de $\mathscr{V}$

Llamemos $L_k = L(\{u_1, u_2, \cdots, u_k\})$ al subespacio generado por los k primeros vectores de S

Construyamos el conjunto $T = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ de manera que:

- $e_1 = u_1$
- $e_2 = u_2 - \dfrac{< u_2, e_1 >}{< e_1, e_1 >} e_1$
- $e_3 = u_3 - \dfrac{< u_3, e_1 >}{< e_1, e_1 >} e_1 - \dfrac{< u_3, e_2 >}{< e_2, e_2 >} e_2$
- $e_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{< u_k, e_i >}{< e_i, e_i >} e_i$

se verifica que:

I. $L_k = L(\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}) = L(\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}) = L'_k$

II. e_{k+1} es ortogonal a L_k

III. $0 \notin T$

IV. $T = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ es un sistema ortogonal de vectores

(Se verá después que $e_k = u_k - P^{\perp}_{L_{k-1}}(u_k)$, siendo $P^{\perp}_{L_k}(v)$ la proyección ortogonal de v sobre el subespacio L_k)

BASES ORTOGONALES

Sea $\mathscr{V}$ un espacio euclídeo o hermítico de dimensión finita n

Sea $B_{\mathscr{V}} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ una base de $\mathscr{V}$ $\quad (\mathscr{V} = L(\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}) = L_n)$

Aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt obtenemos $B_{\mathscr{V}_N} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, sistema ortogonal (y libre) de vectores, con $L'_n = L(\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}) = L_n = \mathscr{V}$

$\Longrightarrow B_{\mathscr{V}_N}$ es base (ortogonal) de $\mathscr{V}$

(en todo espacio euclídeo o hermítico de dimensión finita existen bases ortogonales)

La matriz del cambio de base de $B_{\mathscr{V}_N} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ a $B_{\mathscr{V}} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{< u_2, e_1 >}{< e_1, e_1 >} & \cdots & \dfrac{< u_{n-1}, e_1 >}{< e_1, e_1 >} & \dfrac{< u_n, e_1 >}{< e_1, e_1 >} \\ 0 & 1 & \cdots & \dfrac{< u_{n-1}, e_2 >}{< e_2, e_2 >} & \dfrac{< u_n, e_2 >}{< e_2, e_2 >} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \dfrac{< u_n, e_{n-1} >}{< e_{n-1}, e_{n-1} >} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO ESCALAR EN BASES ORTOGONALES

Sea $B_{\mathscr{V}} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathscr{V}$ (espacio euclídeo / hermítico)

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in \mathscr{V} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \in \mathscr{V}$$

Se verifica:

$$< u, v > = < \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{j=1}^{n} v_j e_j > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j < e_i, e_j > = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$$< u, v > = < \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{j=1}^{n} v_j e_j > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \overline{v_j} < e_i, e_j > = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

Es decir:

$$< u, v > = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$< u, v > = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

(La matriz de Gram para bases ortonormales es la identidad)

Sea $B_{\mathscr{V}} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base ortogonal / ortonormal de $\mathscr{V}$ y $u, v \in \mathscr{V}$

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \qquad \Longrightarrow \qquad \forall j \in \{1,\cdots,n\}, < u, e_j > = u_j < e_j, e_j > \qquad \forall j \in \{1,\cdots,n\}, < u, e_j > = u_j$$

Luego:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{< u, e_i >}{< e_i, e_i >} e_i \qquad\qquad u = \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i \quad (\dagger)$$

Se verifica:

$$< u, v > = \sum_{i=1}^{n} \frac{< u, e_i > < v, e_i >}{< e_i, e_i >} \qquad\qquad < u, v > = \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > < v, e_i > \quad (\dagger)$$

$$< u, v > = \sum_{i=1}^{n} \frac{< u, e_i > \overline{< v, e_i >}}{< e_i, e_i >} \qquad\qquad < u, v > = \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > \overline{< v, e_i >} \quad (\dagger)$$

Y por tanto:

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{| < u, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} \qquad\qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | < u, e_i > |^2 \quad (\dagger)$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{| < u, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} \qquad\qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | < u, e_i > |^2 \quad (\dagger)$$

($\dagger$) Fórmulas de Parseval

Sección 4

Proyecciones ortogonales

Sea $\mathscr{V}$ un espacio euclídeo / hermítico de dimensión finita y $U \subset \mathscr{V}$ un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$

Llamamos **subespacio ortogonal (complemento ortogonal)** de U

$$U^\perp = \{w \in \mathscr{V} / \forall u \in U, < w, u > = 0\}$$

Propiedades:

I. $U^\perp$ es subespacio vectorial de $\mathscr{V}$

II. $U \cap U^\perp = \{0\}$

III. $\mathscr{V} = U \oplus U^\perp$ (y $\dim(\mathscr{V}) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$)

IV. $\forall v \in \mathscr{V}, \exists! u \in \quad, \exists! u^\perp \in U^\perp, v = u + u^\perp$ A $u \in U$ le llamamos **proyección ortogonal** de v sobre U

(y $u^\perp \in U^\perp$ es la **proyección ortogonal** de v sobre $U^\perp$)

V. $(U^\perp)^\perp = U$

CÁLCULO DE LA PROYECIÓN ORTOGONAL

Dada una base del subespacio $U \subset \mathscr{V}$, $B_U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, la proyección ortogonal sobre U de $v \in \mathscr{V}$ será

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

Como $v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in U^{\perp}$ ha de ser ortogonal a U, se verifica:

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\} \;\; < v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, u_j > = 0$$ (sistema de n ecuaciones y n incógnitas α_j)

Si la base del subespacio $U \subset \mathscr{V}$, $B_U = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, es ortogonal / ortonormal, para cualquier $v \in \mathscr{V}$ su proyección ortogonal sobre U es:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{< v, e_i >}{< e_i, e_i >} e_i \qquad\qquad u = \sum_{i=1}^{n} < v, e_i > e_i$$

Podemos definir la aplicación $p_U^{\perp} : \mathscr{V} \longrightarrow U$ que asigne a cada $v \in \mathscr{V}$ su proyección ortogonal u

Propiedades:

I. $p_U^{\perp}$ es lineal

II. $p_U^{\perp}$ es idempotente $\quad p_U^{\perp} \circ p_U^{\perp} = p_U^{\perp}$

III. $\text{Im}(p_U^{\perp}) = U \quad \wedge \quad \text{Ker}(p_U^{\perp}) = U^{\perp}$

MEJOR APROXIMACIÓN

Siendo $p_U^{\perp}(v)$ la proyección ortogonal sobre U de $v \in \mathscr{V}$ se verifica

$$\forall w \in U, \|v - p_U^{\perp}(v)\| \leq \|v - w\|$$

siendo por tanto $p_U^{\perp}(v)$ el elemento de U más *cercano* a v de todos los w de U ($p_U^{\perp}(v)$ es la mejor aproximación a v en U)

Propiedades:

I. $\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v - u\|^2$ $\quad (\|v\|^2 = \|p_U^{\perp}(v)\|^2 + \|p_{U^{\perp}}^{\perp}(v)\|^2)$

II. Siendo $B_U = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base **ortogonal** de U

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|<v, e_i>|^2}{<e_i, e_i>} \leq \|v\|^2 \quad (\dagger) \qquad v \in U \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{|<v, e_i>|^2}{<e_i, e_i>} = \|v\|^2 \quad (\ddagger)$$

III. Siendo $B_U = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base **ortonormal** de U

$$\sum_{i=1}^{n} |<v, e_i>|^2 \leq \|v\|^2 \quad (\dagger) \qquad v \in U \implies \sum_{i=1}^{n} |<v, e_i>|^2 = \|v\|^2 \quad (\ddagger)$$

($\dagger$) Primera desigualdad de Bessel

($\ddagger$) Identidad de Parseval

Sección 5

Ejemplo: Series de Fourier

Sea $\mathscr{V}$ un espacio euclídeo / hermítico de dimensión no finita

$$\text{El sistema } S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\} \subset \mathscr{V} \text{ es } \textbf{libre} \iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \text{ es } \textbf{libre}$$

$$\text{El sistema } S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\} \subset \mathscr{V} \text{ es } \textbf{ligado} \iff \exists n \in \mathbb{N}, S_n = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \text{ es } \textbf{ligado}$$

Encontraremos ejemplos de espacios de dimensión no finita en los **espacios funcionales**

- $C([a,b];\mathbb{K})$ de las funciones reales o complejas de variable real continuas
- $CT([a,b];\mathbb{K})$ de las funciones reales o complejas de variable real continuas a trozos
- $R_2([a,b];\mathbb{K})$ de las funciones reales o complejas de variable real, continuas a trozos en (a,b) y de cuadrado integrable† en $[a,b]$

Caso $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ $\quad f:[a,b] \to \mathbf{R}$ $\quad$ Producto escalar $\quad < f, g > = \int_a^b fg = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

Caso $\mathbb{K} = \mathbf{C}$ $\quad f:[a,b] \to \mathbf{C}$ $\quad$ Producto hermítico $\quad < f, g > = \int_a^b f\overline{g} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$

En los casos $CT([a,b];\mathbb{K})$ y $R_2([a,b];\mathbb{K})$ es necesario considerar como iguales funciones que lo son en casi todo punto (pero no en todos) para que puedan considerarse estos productos escalares / hermíticos

† Existencia de $\int_a^b f^2(x)dx$ en el caso real y de $\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \int_a^b \Re(f(x))^2 + \Im(f(x))^2 dx$ en el complejo

PROYECCIÓN ORTOGONAL

Sea $\mathscr{V}$ un espacio euclídeo / hermítico de dimensión no finita y $U \subset \mathscr{V}$ un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$

Llamamos **subespacio ortogonal**† de U

$$U^{\perp} = \{w \in \mathscr{V} / \forall u \in U, < w, u > = 0\}$$

Propiedades:

I. $U^{\perp}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{V}$

II. $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$

III. $U \cap U^{\perp} = \{0\}$

IV. No tiene porqué existir la proyección ortogonal de un vector $v \in \mathscr{V}$ sobre U

V. Si U es de dimensión finita, con base $B_U = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ ortogonal / ortonormal, sí está garantizada la existencia de la proyección ortogonal $\forall v \in \mathscr{V}$

$$p_U^{\perp}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{< v, e_i >}{< e_i, e_i >} e_i \qquad\qquad p_U^{\perp}(v) = \sum_{i=1}^{n} < v, e_i > e_i$$

† El término **complemento ortogonal** está reservado para el caso de espacios $\mathscr{V}$ de dimensión finita

MEJOR APROXIMACIÓN

Sea $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ un **sistema ortogonal / ortonormal** del espacio euclídeo / hermítico $\mathscr{V}$

Consideremos $v \in \mathscr{V}$ y los subespacios $U_n = L(\{e_1, e_2, \cdots, e_n\})$

En cada uno de ellos, la mejor aproximación es $p^{\perp}_{U_n}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{< v, e_i >}{< e_i, e_i >} e_i$ $\qquad p^{\perp}_{U_n}(v) = \sum_{i=1}^{n} < v, e_i > e_i$ verificándose:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{| < v, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} \leq \|v\|^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} | < v, e_i > |^2 \leq \|v\|^2$$

considerando $m > n$ ($U_m \supset U_n$) se verifica: (suma de términos no negativos acotada)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{| < v, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{| < v, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} \leq \|v\|^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} | < v, e_i > |^2 \leq \sum_{i=1}^{m} | < v, e_i > |^2 \leq \|v\|^2$$

El (cuadrado del) error cometido es, en cada caso:

$$\|v\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{| < v, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} \leq \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{| < v, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} \qquad \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{m} | < v, e_i > |^2 \leq \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} | < v, e_i > |^2$$

Por tanto al considerar más vectores de S, obtenemos mejores aproximaciones, con menos error (en norma)

Las mejores aproximaciones $p^{\perp}_{U_n}(v)$ forman una sucesión de Cauchy

Llamando: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|<v,e_i>|^2}{<e_i,e_i>} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{|<v,e_i>|^2}{<e_i,e_i>}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |<v,e_i>|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |<v,e_i>|^2$

Se verifica: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|<v,e_i>|^2}{<e_i,e_i>} \leq \|v\|^2$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |<v,e_i>|^2 \leq \|v\|^2$ (desigualdad de Bessel)

y $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \frac{|<v,e_i>|}{\|e_i\|} = 0$ $\displaystyle\lim_{i\to\infty} |<v,e_i>| = 0$

El (cuadrado del) error en norma cometido con la sucesión de mejores aproximaciones converge a:

$$\|v\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|<v,e_i>|^2}{<e_i,e_i>} \qquad \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |<v,e_i>|^2$$

SERIE DE FOURIER

$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ un **sistema ortogonal /ortonormal** del espacio euclídeo / hermítico $\mathscr{V}$

Definimos **Serie de Fourier** asociada a cada $v \in \mathscr{V}$

$$v \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<v,e_i>}{<e_i,e_i>} e_i \qquad v \sim \sum_{i=1}^{\infty} <v,e_i> e_i$$

y representa el límite al que convergen las mejores aproximaciones

¿Representará a v su Serie de Fourier?

PERIODICIDAD

Una función $f : \mathbf{R} \to \mathbb{K}$ se dice **periódica** de período T si verifica $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(x+T)$

Propiedad: $f : \mathbf{R} \to \mathbb{K}$ periódica de período $T \implies \forall x \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}, f(x) = f(x+kT)$

(es también periódica de período kT)

Llamamos periodo fundamental T_0 al menor $T > 0$ que verifique $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(x+T)$

Llamamos *frecuencia de* f *a* $\nu = \dfrac{1}{T_0}$, y *pulsación de* f *a* $\omega = \dfrac{2\pi}{T_0}$

Propiedad: $f : \mathbf{R} \to \mathbb{K}$ periódica de período $T \implies \forall \alpha \in \mathbf{R}, \displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$

Las funciones del sistema trigonométrico son periódicas

1 (cualquier período) $\quad \sin x, \cos x \quad (T_0 = 2\pi) \quad \sin nx, \cos nx \quad \left(T_0 = \dfrac{2\pi}{n}\right)$

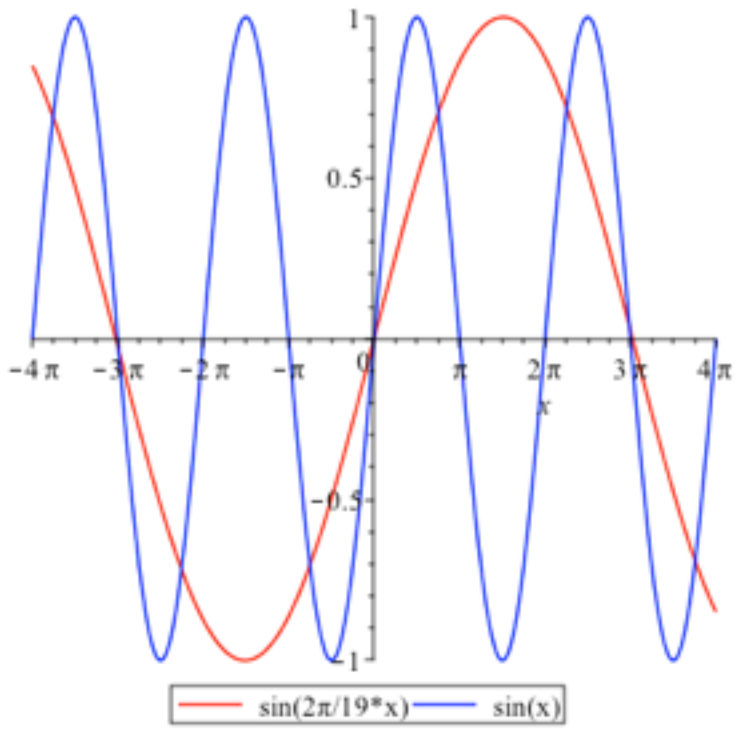
Las funciones del sistema de exponenciales complejas son periódicas

$e^{j0x} = 1$ (cualquier período) $\quad k \neq 0 \implies e^{jk(x+\frac{2\pi}{k})} = e^{jkx}e^{2\pi j} = e^{jkx} \quad (T_0 = \frac{2\pi}{k})$

Si realizamos el cambio de variables $x = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$ obtenemos las funciones periódicas

$$\sin \omega t, \cos \omega t \quad \left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega}\right) \qquad \sin n\omega t, \cos n\omega t \quad \left(T_0 = \frac{2\pi}{n\omega}\right)$$

$$k \neq 0 \implies e^{jk\omega(t+\frac{2\pi}{k\omega})} = e^{jk\omega t}e^{2\pi j} = e^{jk\omega t} \qquad (T_0 = \frac{2\pi}{k\omega})$$

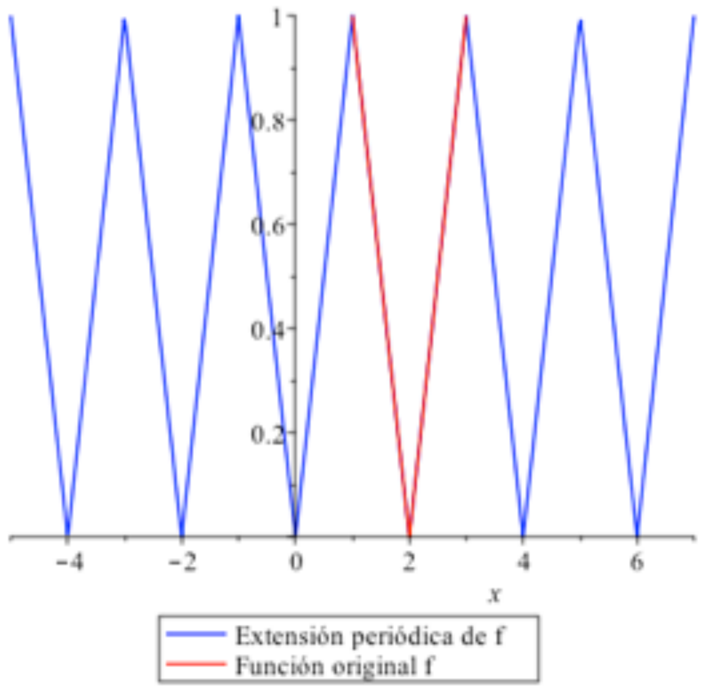


EXTENSIÓN PERIÓDICA

Dada función $f:[a,b]\to\mathbb{K}, f(a)=f(b)$, definimos su **extensión periódica** de período $T=b-a$, a la función

$$\tilde{f}:\mathbf{R}\to\mathbb{K} \text{ que } \forall x\in\mathbf{R}, \tilde{f}(x)=f\left(x-\left\lfloor\frac{x-a}{T}\right\rfloor T\right)$$

que es periódica de período $T=b-a$ y verifica $\forall x\in[a,b], \tilde{f}(x)=f(x)$



SISTEMA TRIGONOMÉTRICO

En espacios reales en $[-\pi, \pi]$, el sistema trigonométrico $\{1, \sin nx, \cos nx\}_{n\in\mathbf{N}}$ es ortogonal

Para comprobarlo, emplearemos las siguientes relaciones trigonométricas

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}\right\} \implies \sin a \cos b = \tfrac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}\right\} \implies \begin{cases}\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))\\ \sin a \sin b = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))\end{cases}$$

Y que $\forall k \in \mathbf{Z} - \{0\}, \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx = 0$

Consideraremos los productos escalares entre todos los pares de vectores

$$< 1, \sin nx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \qquad\qquad < 1, \cos nx > = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$< \sin nx, \cos mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) dx = 0$$

$$< \sin nx, \sin mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$< \cos nx, \cos mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

Las normas son:

$$< 1,1 > = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi \qquad \|1\| = \sqrt{2\pi}$$

$$< \sin nx, \sin nx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2}dx = \pi \qquad \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$$

$$< \cos nx, \cos nx > = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}dx = \pi \qquad \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$$

Por tanto el sistema $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n\in\mathbf{N}}$ es ortonormal

En espacios reales de funciones definidas en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, $\left[0,T\right]$ (o en general $[\alpha, \alpha + T]$)

y llamando $\omega = \frac{2\pi}{T}$, el sistema $\{1, \sin n\omega t, \cos n\omega t\}_{n\in\mathbf{N}}$ es ortogonal

Por ejemplo: $< \sin n\omega t, \cos m\omega t > = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t \cos m\omega tdt = \frac{1}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx = 0$

(realizando el cambio $x = \omega t, \quad dx = \omega dt$)

Puede comprobarse que en los demás productos escalares el resultado es similar

Las normas son:

$$< 1,1 > = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1dt = T \qquad\qquad \|1\| = \sqrt{T}$$

$$< \sin n\omega t, \sin n\omega t > = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 n\omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos 2n\omega t}{2} dt = \frac{T}{2} \qquad\qquad \|\sin n\omega t\| = \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$< \cos n\omega t, \cos n\omega t > = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 n\omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos 2n\omega t}{2} dt = \frac{T}{2} \qquad\qquad \|\cos n\omega t\| = \sqrt{\frac{T}{2}}$$

SERIE DE FOURIER TRIGONÓMETRICA

Dado $f \in \mathbb{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbf{R})$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

Siendo:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{< f(x),1 >}{< 1,1 >} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{< f(x), \cos nx >}{< \cos nx, \cos nx >} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{< f(x), \sin nx >}{< \sin nx, \sin nx >} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

La identidad de Parseval queda:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Ya que $\displaystyle \sum_{i=1}^{\infty} \frac{| < v, e_i > |^2}{< e_i, e_i >} = \|v\|^2 \Longleftrightarrow (2\pi \frac{a_0}{2})^2 \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi a_n)^2}{\pi} + \frac{(\pi b_n)^2}{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$

Dado $f \in \mathbb{L}^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbf{R})$

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt \qquad \text{(identidad de Parseval)}$$

SISTEMA DE EXPONENCIALES COMPLEJAS

En espacios complejos en $[-\pi, \pi]$, el sistema de exponenciales complejas $\{e^{jkx}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ es ortogonal

Consideraremos los productos hermíticos entre todos los pares de vectores

$$< e^{jkx}, e^{jlx} > = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx}\overline{e^{jlx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx}e^{-jlx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k-l)x}dx = [\frac{1}{j(k-l)}e^{j(k-l)x}]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (k \neq l)$$

Las normas son:

$$< e^{jkx}, e^{jkx} > = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx}\overline{e^{jkx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx}e^{-jkx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi \qquad \forall k \in \mathbf{Z}, \|e^{jkx}\| = \sqrt{2\pi}$$

Por tanto el sistema $\left\{\frac{e^{jkx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$ es ortonormal

En espacios complejos de funciones definidas en el intervalo $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, $\left[0,T\right]$ (o en general $[\alpha, \alpha + T]$)

y llamando $\omega = \frac{2\pi}{T}$, el sistema $\{e^{jk\omega t}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ es ortogonal

$$< e^{jk\omega t}, e^{jl\omega t} > = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega t}\overline{e^{jl\omega t}}dt = \frac{1}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx}\overline{e^{jlx}}dx = 0 \qquad (k \neq l)$$

(realizando el cambio $x = \omega t, \quad dx = \omega dt$)

Puede comprobarse que en los demás productos escalares el resultado es similar

Las normas son

$$< e^{jk\omega t}, e^{jk\omega t} > = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega t}\overline{e^{jk\omega t}}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega t}e^{-jk\omega t}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1dt = T \qquad \forall k \in \mathbf{Z}, \|e^{j\omega t}\| = \sqrt{T}$$

$$f \text{ es par } \implies \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\cos nx dx & \forall n \in \mathbf{N}\cup\{0\} \\ b_n = 0 & \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

(en $f \in \mathbb{L}^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbf{R})$, $f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$)

f es impar $\Longrightarrow \begin{cases} a_n = 0 & \forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \ \sin nx dx & \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

(en $f \in \mathbb{L}^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbf{R})$, $f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$)

Análisis espectral: autovalores, autovectores

- **Autovalores y autovectores de un endomorfismo**
- **Subespacios propios**
- **Diagonalización de endomorfismos y matrices**

Sección 1

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

Sean $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$ -e.v. y f la aplicación lineal (endomorfismo) $f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$

El subespacio vectorial $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ se dice **invariante** respecto de f si $f(\mathscr{W}) \subset \mathscr{W}$ (es decir, $v \in \mathscr{W} \implies f(v) \in \mathscr{W}$

Ejemplos:

$\{0\}, \mathscr{V}, \ker(f)$ e $\operatorname{img}(f)$ son subespacios invariantes de cualquier endomorfismo $f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$

Si $r : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ representa una rotación de ángulo α $(0 < \alpha < 2\pi)$ en $\mathbf{R}^3$ con respecto al eje Z, son invariantes el plano XY y el eje Z

Si $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ representa la proyección ortogonal de $\mathbf{R}^3$ sobre el plano XY, son invariantes, el plano XY, el eje Z, cualquier plano que contenga al eje Z y cualquier recta contenida en el plano XY que pase por el origen

Propiedades:

I. $\mathscr{U}, \mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ invariantes $\implies$ $\mathscr{U} + \mathscr{W}$ invariante y $\mathscr{U} \cap \mathscr{W}$ invariante

$u \in \mathscr{U} \wedge w \in \mathscr{W} \implies u + w \in \mathscr{U} + \mathscr{W} \implies f(u+w) = f(u) + f(w) \in \mathscr{U} + \mathscr{W}$

$u \in \mathscr{U} \cap \mathscr{W} \implies u \in \mathscr{U} \wedge u \in \mathscr{W} \implies f(u) \in \mathscr{U} \wedge f(u) \in \mathscr{W} \implies f(u) \in \mathscr{U} \cap \mathscr{W}$

II. $\mathscr{W} \subset \mathscr{V} \wedge \dim(\mathscr{W}) = 1 \wedge \mathscr{W}$ invariante $\wedge f(x) = \lambda x \implies \forall y \in \mathscr{W}, f(y) = \lambda y$

$\mathscr{W} = L(\{e_1\}) \implies x = x_1 e_1 \implies e_1 = x_1^{-1} x \implies y = y_1 e_1 = y_1 x_1^{-1} x \implies f(y) = y_1 x_1^{-1} f(x) = y_1 x_1^{-1} \lambda x = \lambda y$

Definiciones:

Sean $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$ -e.v. y f la aplicación lineal (endomorfismo) $f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$

$v \in \mathscr{V}, v \neq 0$ es un **vector propio, vector característico** o **autovector** de f si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$,

llamándose a $\lambda \in \mathbb{K}$ **valor propio, valor característico** o **autovalor** de f correspondiente al vector v

Propiedades:

I. $v \in \mathscr{V}, v \neq 0$ es autovector de f con autovalor $\lambda \in \mathbb{K} \implies \forall w \in L(\{v\}), w \neq 0, f(w) = \lambda w$ y $L(\{v\})$ es invariante

II. $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de $f \implies S_\lambda = \{v \in \mathscr{V}, f(v) = \lambda v\}^{\dagger}$ es un subespacio vectorial invariante de $\mathscr{V}$

$0 \in S_\lambda \implies S_\lambda \neq \varnothing$

$v, w \in S_\lambda \implies f(v + w) = f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w) \implies v + w \in S_\lambda$

$v \in S_\lambda \implies f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha\lambda v = \lambda(\alpha v) \implies \alpha v \in S_\lambda$

$v \in S_\lambda \implies f(v) = \lambda v \in S_\lambda$

Se denomina **subespacio propio,** o **autoespacio,** correspondiente al autovalor λ a $S_\lambda = \{v \in \mathscr{V}, f(v) = \lambda v\}$

Ejemplo: $D : C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, que $D(f(x)) = f'(x)$. $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ es autovector de D asociado al autovalor $\lambda \in \mathbf{R}$

† S_λ incluye a 0, además de a los autovectores asociados a λ

Sean $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$ -e.v. y f la aplicación lineal (endomorfismo) $f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$

Si $\dim \mathscr{V} = n$ y $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base formada por autovectores $(f(v_i) = \lambda_i v_i)$,

la matriz de f respecto a B es diagonal $F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Definición:

$f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ es **diagonalizable** $\Longleftrightarrow$ Existe una base de $\mathscr{V}$ respecto de la cual la matriz de f es diagonal

$F \in \mathbf{M}_{n\times n}$ es **diagonalizable** $\Longleftrightarrow$ La aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ que tiene a F como matriz es diagonalizable

Proposición:

$f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ Existe una base de $\mathscr{V}$ formada por autovectores

Proposición:

$F \in \mathbf{M}_{n\times n}$ es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ $\exists P \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), P^{-1} \cdot F \cdot P$ es diagonal (llamándose a P **matriz de paso**)

Considere P la matriz del cambio de base a la base formada por autovectores

Respecto de esta base de autovectores, la matriz de f es $P^{-1} \cdot F \cdot P$, diagonal por ser respecto de una base de autovectores

Proposición:

Vectores propios del endomorfismo $f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ autovalores distintos de f y $v_1, v_2, \cdots, v_n$ autovectores asociados ($f(v_i) = \lambda_i v_i$). Inductivamente:

$\{v_1\}$ es libre

$\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ libre y $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \implies \lambda_{k+1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = 0$

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) = 0 \implies \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \implies$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) v_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \implies \alpha_{k+1} = 0$$

$\{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$ libre

Corolario:

$\dim(\mathscr{V}) = n$ y $f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ tiene n autovalores distintos $\implies$ f es diagonalizable

Cálculo de los autovalores y autovectores:

Sean $\mathscr{V}$ un $\mathbb{K}$ -e.v. y f la aplicación lineal (endomorfismo) $f: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor y $v \in \mathscr{V}$ un autovector asociado

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff (f - \lambda i_{\mathscr{V}})(v) = 0 \iff \begin{cases} \mathrm{r}(f - \lambda i_{\mathscr{V}}) < n \\ v \in \ker(f - \lambda i_{\mathscr{V}}) \end{cases}$$

Si $\dim(\mathscr{V}) = n$ y la matriz de f respecto a cierta base B es $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, y siendo $V \in \mathbb{K}^n$ las coordenadas de un autovector $v \in \mathscr{V}$

$$F \cdot V = \lambda V \iff F \cdot V - \lambda V = 0 \iff F \cdot V - \lambda I_n \cdot V = 0 \iff (F - \lambda I_n) \cdot V = 0 \iff \begin{cases} \mathrm{r}(F - \lambda I_n) < n & \iff |F - \lambda I_n| = 0 \\ (F - \lambda I_n) \cdot V = 0 \end{cases}$$

Nótese que el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$, $S_\lambda = \{v \in \mathscr{V}, f(v) = \lambda v\}$ es $S_\lambda = \ker(f - \lambda i_{\mathscr{V}})$

Definiciones:

Polinomio característico de una matriz $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $p(\lambda) = |F - \lambda I_n| = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

Ecuación característica de una matriz $F \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $p(\lambda) = |F - \lambda I_n| = 0 \iff (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

Proposición:

Dos matrices $F, F' \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ del endomorfismo $f : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ respecto de dos bases B, B' tienen el mismo polinomio característico (y por tanto, los mismos autovalores)

$\exists P \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), F' = P^{-1} \cdot F \cdot P \implies |F' - \lambda I_n| = |P^{-1} \cdot F \cdot P - \lambda P^{-1} \cdot I_n \cdot P| = |P^{-1} \cdot (F - \lambda I_n) \cdot P| = |P^{-1}| \cdot |F - \lambda I_n| \cdot |P| = |F - \lambda I_n|$

Polinomio característico y **ecuación característica** de un endomorfismo. los de una cualquiera de sus matrices

Proposición:

$\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor del endomorfismo $f \iff \lambda$ es raíz del polinomio característico de f (o solución de su ecuación característica)

Si $\mathbb{K} = \mathbf{R}$, el polinomio característico tiene como mucho n raíces

Si $\mathbb{K} = \mathbf{C}$, el polinomio característico tiene exactamente n raíces (pudiendo ser múltiples)

Sea $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Supongamos que sus raíces son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$

Podemos escribir $p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}\, i(\lambda)^{\dagger}$, con $m_1 + m_2 + \cdots + m_k \leq n$

Definiciones:

m_j es la **multiplicidad algebraica** del autovalor λ_j

$r_j = \dim(S_{\lambda_j})$ es la **multiplicidad geométrica** del **autovalor** λ_j (representa el máximo número de autovectores l.i. asociados a λ_j)

Propiedades (sin demostración)**:**

I. $1 \leq r_j \leq m_j$

II. $k \leq r_1 + r_2 + \cdots + r_k \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_k \leq n$

III. El número máximo de autovectores de f linealmente independientes es $r_1 + r_2 + \cdots + r_k$

IV. $m_1 + \cdots + m_k = n \wedge \forall j \in \{1, \cdots, k\}, m_j = r_j \iff f$ diagonalizable

† $i(\lambda)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{K}$. En el caso de $\mathbb{K} = \mathbf{C}$, $i(\lambda) = 1$ y $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$